Exercices de révisions pour les élèves ayant choisi Spécialité Mathématiques ou l'option Maths Complémentaires en Terminale

Fonction du second degré

Exercice 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = 5x^2 - 2x - 7$ et $\mathcal{P}$ sa courbe représentative.

a) Dresser le tableau de variations de f.

b) En déduire le minimum de f.

c) Représenter la courbe $\mathcal{P}$.

Exercice 2

Déterminer l'expression des deux fonctions polynômes du second degré vérifiant :

1) f a pour racines 0 et 5 et $f(1) = 2$.

2) g a un minimum en $\frac{7}{2}$ et la courbe de f passe par $A(2\,;3)$ et $B(4\,;2)$.

Exercice 3

Soit $\mathcal{P}$ la courbe d'équation $y = \frac{1}{2}x^2$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = \frac{7}{2}x - 8$.

Étudier la position relative de ces deux courbes.

Exercice 4

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2x^2 - 4x - 6 = 0$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x^2 - 6x + 8 < 0$

Étude de signes

Étudier sur $\mathbb{R}$ le signe des expressions algébriques suivantes :

1) $f(x) = (3x+2)(x^2+1)(1-x)$

2) $g(x) = \dfrac{(-3x^2 - x + 2)(x-2)}{3x-9}$

3) $h(x) = \dfrac{5e^{3x+1} - 2xe^{3x+1}}{(x-1)^2}$

Dérivation

Exercice 1 : Déterminer les dérivées des fonctions suivantes définies et dérivables sur un ensemble adapté :

1) $f(x) = \frac{x^2}{3}$

2) $f(x) = 2x^2 + \sqrt{x}$

3) $f(x) = (2x-1)(3x^2+x+1)$

4) $f(x) = \frac{-3}{x-5}$

5) $f(x) = 3x + 1 - \frac{5}{2x-1}$

6) $f(x) = \sqrt{2x+3}$

7) $f(x) = \cos(x)\sin(x)$

8) $f(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$

Exercice 2

Une entreprise extrait et vend une matière première. Pour x tonnes vendues, elle réalise un bénéfice, en euro, donné par la fonction B définie sur l'intervalle [0 ; 50] par :

$$B(x) = -x^3 + 10x^2 + 3000x$$

a) Déterminer $B'(x)$ et étudier son signe selon les valeurs de x.

b) En déduire le tableau de variation de B.

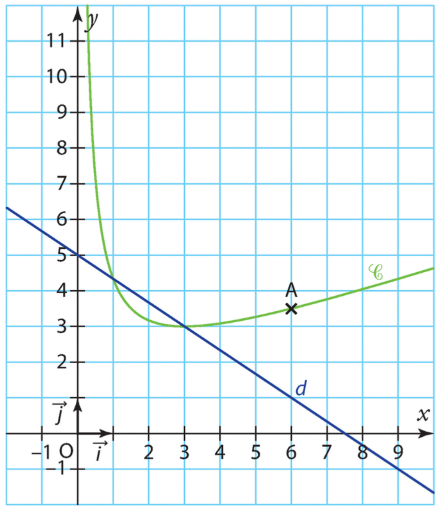
c) Quelle quantité de matière première, en kg, l'entreprise doit-elle vendre pour réaliser un bénéfice maximum ? Quel est alors son bénéfice, en euro ?

Exercice 3

La courbe $\mathcal{C}$ donnée ci-contre est la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + 3x + 9}{3x}$ définie sur l'intervalle $\mathrm{I} =]0\,;\, +\infty[$.

La droite d a pour équation $y = -\dfrac{2}{3}x + 5$.

Le point A d'abscisse 6 est situé sur la courbe $\mathcal{C}$.



1. **a)** Justifier que f est dérivable sur I.

b) Montrer que, pour tout réel x de I, $f'(x) = \dfrac{x^2 - 9}{3x^2}$.

2. Justifier que la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 6 a pour équation $y = \dfrac{1}{4}x + 2$.

Suites numériques

Exercice 1

On considère la suite récurrente (u_n) définie de la façon suivante : $u_1 = 0$, et pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n}$.

1. **a)** En utilisant un tableur, calculer les 20 premiers termes de cette suite.

b) Représenter graphiquement le nuage de points de coordonnées $(n\,;u_n)$.

c) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? est-elle géométrique ? Justifier.

d) Conjecturer l'expression explicite de u_n en fonction de n.

On cherche une formule qui permette de calculer u_n en fonction de n.

On considère la suite (v_n) définie de la façon suivante : pour tout entier naturel n non nul, $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

2. **a)** Compléter le tableau de valeurs de la question **1a)**.

b) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.

c) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 2

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour. La société met en place le dispositif industriel suivant. Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus. L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.
On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante : $u_0 = 1000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}2u_n - 100$.

1. **a)** Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé. On précisera en particulier ce que représente u_n.

b) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? est-elle géométrique ? Justifier.

c) L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

d) On peut également utiliser l'algorithme ci-contre, pour répondre au problème posé dans la question précédente. Recopier et compléter cet algorithme.

$n \leftarrow 0$
$u \leftarrow 1000$
Tant que ….
    $u \leftarrow$ ….
    $n \leftarrow n + 1$
Fin tant que

2. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1000$.
Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

3. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 500$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Conjecturer la limite de la suite (u_n).

Probabilités

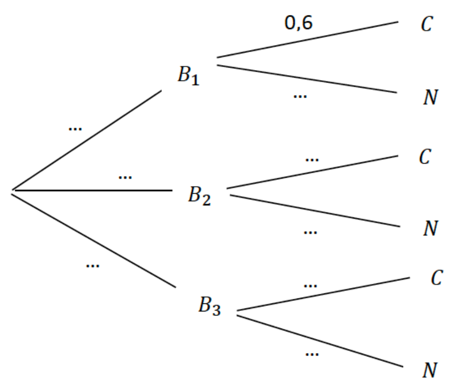
Un cafetier propose à ses clients des cookies au chocolat ou aux noisettes en s'approvisionnant dans trois boulangeries. Un client prend un cookie au hasard.

On note :
C l'évènement « le cookie est au chocolat »,
N l'évènement « le cookie est aux noisettes »,
B_1 l'évènement « le cookie provient de la boulangerie 1 »,
B_2 l'évènement « le cookie provient de la boulangerie 2 »,
B_3 l'évènement « le cookie provient de la boulangerie 3 ».

On suppose que :

- la probabilité que le cookie provienne de la boulangerie 1 est de 0,49 ;
- la probabilité que le cookie provienne de la boulangerie 2 est de 0,36 ;
- $P_{B_2}(C) = 0{,}4$ où $P_{B_2}(C)$ est la probabilité conditionnelle de C sachant B_2 ;
- la probabilité que le cookie soit aux noisettes sachant qu'il provient de la $3^{\text{ème}}$ boulangerie est de 0,3.

L'arbre pondéré ci-dessous correspond à la situation et donne une information supplémentaire : le nombre 0,6 sur la branche de B_1 à C.



1. Exprimer par une phrase l'information donnée par le nombre 0,6 sur la branche de B_1 à C.
2. Compléter l'arbre pondéré ci-dessus.
3. Définir par une phrase l'événement $B_1 \cap C$ et calculer sa probabilité.
4. Montrer que la probabilité $P(C)$ d'avoir un cookie au chocolat est égale à 0,543.
5. Les évènements B_1 et C sont-ils indépendants ?
6. Calculer la probabilité d'avoir un cookie provenant de la boulangerie 2 sachant qu'il est au chocolat. On donnera le résultat arrondi au millième.

Fonction exponentielle

Les six parties sont indépendantes.

Partie A

t est un réel quelconque. Simplifier au maximum les expressions suivantes.

1. $d(t) = e^{3t} \times e^{1-6t} \times (e^{2t+1})^3$
2. $e(t) = \dfrac{e^{8t-3}}{e^{2t+5}}$
3. $f(t) = \dfrac{e^{-2t+1} \times e^{6t+5}}{e^{-4t-2}}$

Partie B

Déterminer la fonction dérivée, sous forme factorisée, de la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = (x+1)e^x$
2. $f(x) = (-2x+3)e^x$
3. $f(x) = x^2e^x$
4. $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x$

Partie C

Pour chaque fonction f définie ci-dessous, donner le domaine de définition ainsi que l'expression de la fonction dérivée f'.

1. $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$
2. $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$
3. $f(x) = e^x + 1$
4. $f(t) = \dfrac{e^t + 1}{t - 1}$

Partie D

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $e^x = e^{-2}$
2. $e^x = e$
3. $e^{x+2} = e^3$
4. $e^{2x+1} = e$
5. $e^x = 1$
6. $e^x + 4 = 0$
7. $e^{x^2} = e$
8. $e^{x^2+1} = 1$

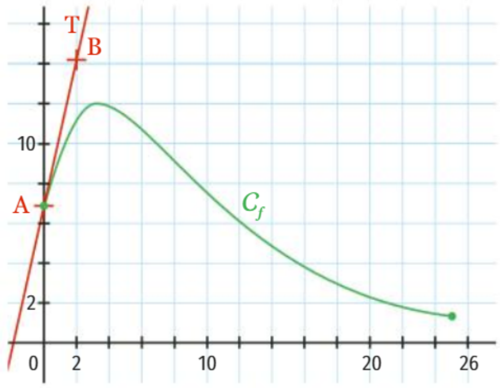
Partie E

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $e^{x+1} < 1$
2. $-3e^{x^2-4} > 4$
3. $e^{-2x+5} \geq 0$
4. $e^{x+4} \leq \dfrac{1}{e^{3x}}$

Partie F

On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe représentative C_f d'une fonction f définie sur $\mathrm{I} = [0\,;25]$ par $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-0,2x}$ où a et b sont deux nombres réels. On a représenté également sa tangente T au point $\mathrm{A}(0\,;7)$. T passe par le point $\mathrm{B}(2\,;14,2)$.



1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 6$.

2. a. Par lecture graphique, donner $f(0)$.

b. Écrire $f(0)$ en fonction de a et b.

c. En déduire que sur I, $f(x) = (ax+7)\mathrm{e}^{-0,2x}$.

3. a. Quel est le coefficient directeur de la droite T ?

b. Exprimer, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x)$ en fonction de a.

c. En déduire que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) = (5x+7)\mathrm{e}^{-0,2x}$.

4. On souhaite connaître le maximum de la fonction f sur I.

a. Montrer que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) = (-x+3,6)\mathrm{e}^{-0,2x}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ puis les variations de f sur I.

c. En déduire le maximum de f sur I.

Les thèmes suivants ne concernent pas les élèves d'option Maths Complémentaires

Produit scalaire

Exercice 1

Quel est le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ $égal$ à -2 ?

a. $AB = 2, AC = 3$ et l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \pi$.

b. $AB = 4, AH = 0{,}5$ où H est le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

c. $AB = 5, AC = 4\ et\ BC = 6$.

d. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$.

Exercice 2

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$.
On considère les points $A(-1\ ;2)$, $B(-3\ ;1)$ et $C(1\ ;\ -3)$.

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
2. En déduire une mesure de l'angle $\hat{A}$ (arrondie au degré).

Exercice 3

Déterminer la valeur du réel x pour laquelle les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\x\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ sont orthogonaux.

Trigonométrie

1. Convertir en radians les mesures d'angles exprimées en degrés : $\alpha = 12°$ et $\beta = 195°$.
Les résultats exacts sont attendus, simplifiés si c'est possible.

2. Convertir en degrés les mesures d'angles exprimées en radians : $a = \dfrac{7\pi}{12}$ et $b = \dfrac{13\pi}{9}$.

3. On sait d'un réel x que $x \in [0\ ;\pi]$ et $\cos x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

3.1. Déterminer la valeur exacte de $\sin x$.

3.2. On sait que le réel x cherché est l'un des réels $\left\{-\dfrac{4\pi}{5}\ ;\ -\dfrac{\pi}{5}\ ;\ \dfrac{\pi}{5}\ ;\ \dfrac{4\pi}{5}\right\}$. Qui est x ? Justifier.

4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2x) + \cos(x) \times \sin(x)$.

4.1 Montrer que la fonction f est périodique et de période π.

Une fonction trigonométrique f définie sur $\mathbb{R}$ est **périodique de période T** si et seulement si, **pour tout réel x, $f(x+T) = f(x)$**.

4.2 Déterminer la parité de f.

• Une fonction f est dite **paire** (*respectivement* **impaire**) lorsque :

- pour tout réel x de son ensemble de définition $\mathcal{D}$, $(-x) \in \mathcal{D}$ (autrement dit, $\mathcal{D}$ est centré en 0)
- pour tout réel x de $\mathcal{D}$, $f(-x) = f(x)$. (*respectivement*, pour tout réel x de $\mathcal{D}$, $f(-x) = -f(x)$)