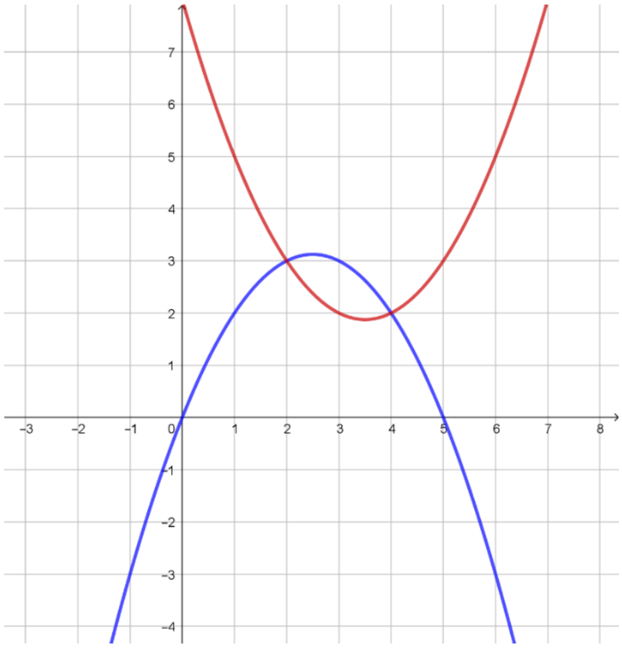
Exercices de révisions pour les élèves ayant choisi Spécialité Mathématiques ou l'option Maths Complémentaires en Terminale

Exercice 1 *Fonction du second degré*

Partie A



Sur le dessin ci-contre sont représentées deux fonctions trinômes du second degré f et g.

1) On sait que le discriminant de f est positif et celui de g négatif
Indiquer, en justifiant, laquelle des deux courbes représente f et laquelle représente g.

2) f a pour racines 0 et 5 et de plus $f(1) = 2$.
Déterminer l'expression de $f(x)$.

3) g a un minimum en $\frac{7}{2}$ et de plus les courbes de f et g se coupent en $A(2\,;3)$ et $B(4\,;2)$.
Déterminer l'expression de $g(x)$.

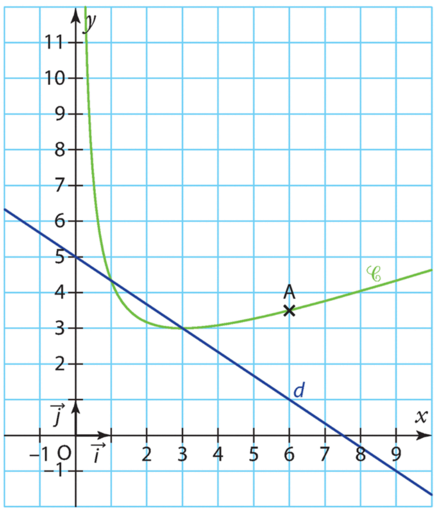
4) Vérifier à la calculatrice en représentant graphiquement les fonctions f et g à partir des expressions obtenues dans le 2) et 3).

5) Calculer l'extrémum de f et l'extrémum de g.

Partie B

Soit $\mathcal{P}$ la courbe d'équation $y = \frac{1}{2}x^2$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = \frac{7}{2}x - 8$. Etudier la position relative de ces deux courbes.

Exercice 2 *Dérivation*



La courbe $\mathcal{C}$ donnée ci-contre est la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2+3x+9}{3x}$ définie sur l'intervalle $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$.

La droite d a pour équation $y = -\frac{2}{3}x + 5$.

Le point A d'abscisse 6 est situé sur la courbe $\mathcal{C}$.

1. a) Justifier que f est dérivable sur I.

b) Montrer que, pour tout réel x de I, $f'(x) = \frac{x^2-9}{3x^2}$.

2. Justifier que la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 6 a pour équation $y = \frac{1}{4}x + 2$.

3. Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses **en justifiant**.

a) f est strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;3]$.

b) $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 2.

c) Pour tout réel x strictement positif, $f(x) \geq 3$.

d) La courbe $\mathcal{C}$ est en-dessous de la droite d sur l'intervalle $[1\,;3]$.

e) Les droites d et $\mathcal{T}$ se coupent au point d'abscisse 3,3.

Exercice 3 ***Dérivation***

Une entreprise extrait et vend une matière première. Pour x tonnes vendues, elle réalise un bénéfice, en euro, donné par la fonction B définie sur l'intervalle [0 ; 50] par :

$$B(x) = -x^3 + 10x^2 + 3000x$$

a) Déterminer $B'(x)$ et étudier son signe selon les valeurs de x.

b) En déduire le tableau de variation de B.

c) Quelle quantité de matière première, en kg, l'entreprise doit-elle vendre pour réaliser un bénéfice maximum ? Quel est alors son bénéfice, en euro ?

Exercice 4 ***Suites numériques***

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour. La société met en place le dispositif industriel suivant. Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus. L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.
On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante : $u_0 = 1000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}2u_n - 100$.

1. **a)** Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé. On précisera en particulier ce que représente u_n.

b) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? est-elle géométrique ? Justifier.

c) L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

d) On peut également utiliser l'algorithme ci-contre, pour répondre au problème posé dans la question précédente. Recopier et compléter cet algorithme.

```
n ← 0
u ← 1000
Tant que ....
    u ← ....
    n ← n + 1
Fin tant que
```

2. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1000$.
Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

3. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 500$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Conjecturer la limite de la suite (u_n).

Exercice 5 ***Fonction exponentielle***

Les six parties sont indépendantes.

Partie A

t est un réel quelconque. Simplifier au maximum les expressions suivantes.

1. $d(t) = e^{3t} \times e^{1-6t} \times (e^{2t+1})^3$

2. $e(t) = \dfrac{e^{8t-3}}{e^{2t+5}}$

3. $f(t) = \dfrac{e^{-2t+1} \times e^{6t+5}}{e^{-4t-2}}$

Partie B

Déterminer la fonction dérivée, sous forme factorisée, de la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = (x+1)e^x$

2. $f(x) = (-2x+3)e^x$

3. $f(x) = x^2 e^x$

4. $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x$

Partie C

Pour chaque fonction f définie ci-dessous, donner le domaine de définition ainsi que l'expression de la fonction dérivée f'.

1. $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$

2. $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$

3. $f(x) = e^x + 1$

4. $f(t) = \dfrac{e^t + 1}{t - 1}$

Partie D

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $e^x = e^{-2}$

2. $e^x = e$

3. $e^{x+2} = e^3$

4. $e^{2x+1} = e$

5. $e^x = 1$

6. $e^x + 4 = 0$

7. $e^{x^2} = e$

8. $e^{x^2+1} = 1$

Partie E

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $e^{x+1} < 1$

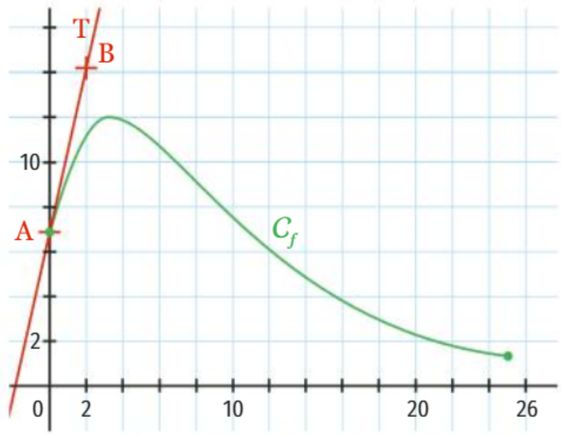
2. $-3e^{x^2-4} > 4$

3. $e^{-2x+5} \geqslant 0$

4. $e^{x+4} \leqslant \dfrac{1}{e^{3x}}$

Partie F

On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe représentative C_f d'une fonction f définie sur $\mathrm{I}=[0\,;25]$ par $f(x)=(ax+b)e^{-0{,}2x}$ où a et b sont deux nombres réels. On a représenté également sa tangente T au point $\mathrm{A}(0\,;7)$. T passe par le point $\mathrm{B}(2\,;14{,}2)$.



1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=6$.

2. a. Par lecture graphique, donner $f(0)$.

b. Écrire $f(0)$ en fonction de a et b.

c. En déduire que sur I, $f(x)=(ax+7)e^{-0{,}2x}$.

3. a. Quel est le coefficient directeur de la droite T ?

b. Exprimer, pour tout $x\in\mathrm{I}$, $f'(x)$ en fonction de a.

c. En déduire que, pour tout $x\in\mathrm{I}$, $f(x)=(5x+7)e^{-0{,}2x}$.

4. On souhaite connaître le maximum de la fonction f sur I.

a. Montrer que, pour tout $x\in\mathrm{I}$, $f'(x)=(-x+3{,}6)e^{-0{,}2x}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ puis les variations de f sur I.

c. En déduire le maximum de f sur I.

Exercice 6 ***Produit scalaire*** ***(Cet exercice 6 ne concerne pas les élèves d'option Maths Complémentaires)***

Les 3 parties sont indépendantes les unes des autres.

Partie A

On considère un carré ABCD de côté 1 et un point M quelconque sur le segment [BD]. On construit les projetés orthogonaux H et K du point M respectivement sur les côtés [AB] et [AD].
Dans cet exercice, on souhaite démontrer de deux manières différentes que les droites (CK) et (DH) sont perpendiculaires et que les longueurs CK et DH sont égales.

1. Faire une figure.

2. *A l'aide de considérations géométriques*

a) Démontrer, grâce à un théorème de géométrie plane, que DK $=$ AH.

b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{DH}$ en décomposant les vecteurs à l'aide de la relation de Chasles.

c) Que peut-on en conclure ?

d) Démontrer que CK $=$ DH.

3. *A l'aide d'un repère orthonormé*

On considère le repère $(A\,;B,D)$ et on note $(x\,;y)$ les coordonnées du point M dans ce repère.

a) Donner les coordonnées de chaque point de la figure dans ce repère.

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (BD).

c) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{DH}$. Conclure.

d) Démontrer que CK $=$ DH.

Partie B

ABC est un triangle isocèle rectangle tel que $AB = AC = 6\ cm$. On note I le milieu de [AB].

1. Montrer que, pour tout point M du plan, on a : $MA^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MC} = MI^2 - 9$.

2. En déduire l'ensemble des points M tels que : $MA^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MC} = 12$.

Partie C

On donne, dans un repère orthonormé du plan, les points A (– 2 ; 1), B (0 ; – 3) et C (3 ; – 1).

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite d perpendiculaire à (AC) passant par B.

2. On admet que la droite (AC) admet pour équation cartésienne $-2x - 5y + 1 = 0$.
Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point B sur la droite (AC).

3. Donner une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AC].

4. Le point B appartient-il à ce cercle ? Justifier.

5. Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\widehat{ABC}\right)$. En déduire une valeur approchée en degré au dixième près de l'angle $\widehat{ABC}$.

6. Calculer l'aire du triangle ABC.

7. Soit D le point de coordonnées (3 ; 1).
Calculer $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}$. Que peut-on en déduire pour le triangle ADC ? Pour le point D ?

8. Déterminer les coordonnées des points d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses.

<u>Exercice 7</u> *Probabilités*

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On considère l'urne ci-dessous, on tire successivement et sans remise des boules jusqu'à obtention d'une boule rouge.

On note X la variable aléatoire donnant le rang d'apparition de la première boule rouge.

1. Modéliser cette expérience à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Quelles sont les différentes valeurs prises par X ?
3. En justifiant les calculs, déterminer la loi de probabilité de X.
4. On considère le script Python suivant :

```python
X = [1, 2, 3]
P = [0.6, 0.3, 0.1]
S = 0
for i in range(3):
    S = S + X[i] * P[i]
print ("S =",S)
```

```
S = 1.5
```

   a) Expliquez ce que représente la valeur finale de la variable S calculée.

   b) En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

   c) Modifier ce script afin qu'il calcule la variance de X.

Partie B (La partie B ne concerne pas les élèves d'option Maths Complémentaires)

On considère les vecteurs de la forme $\binom{a}{b}$ où a et b peuvent prendre les valeurs 0 ; 1 ou – 1.

On choisit au hasard deux vecteurs de cette forme.

1. Quelle est la probabilité de l'évènement O : « Ces deux vecteurs sont orthogonaux » ?
2. Quelle est la probabilité de l'évènement N : « Ces deux vecteurs sont de norme 1 » ?
3. Les évènements O et N sont-ils indépendants ? Justifier.

<u>Exercice 8</u> *Trigonométrie* *(Cet exercice 8 ne concerne pas les élèves d'option Maths Complémentaires)*

1. Convertir en radians les mesures d'angles exprimées en degrés : $\alpha = 12°$ et $\beta = 195°$.
Les résultats exacts sont attendus, simplifiés si c'est possible.

2. Convertir en degrés les mesures d'angles exprimées en radians : $a = \frac{7\pi}{12}$ et $b = \frac{13\pi}{9}$.

3. On sait d'un réel x que $x \in [0\,;\pi]$ et $\cos x = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

3.1. Déterminer la valeur exacte de $\sin x$.

3.2. On sait que le réel x cherché est l'un des réels $\{-\frac{4\pi}{5}\ ; -\frac{\pi}{5}\ ; \frac{\pi}{5}\ ; \frac{4\pi}{5}\}$. Qui est x ? Justifier.

4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2x) + \cos(x) \times \sin(x)$.

4.1 Montrer que la fonction f est périodique et de période π.

4.2 Déterminer la parité de f.