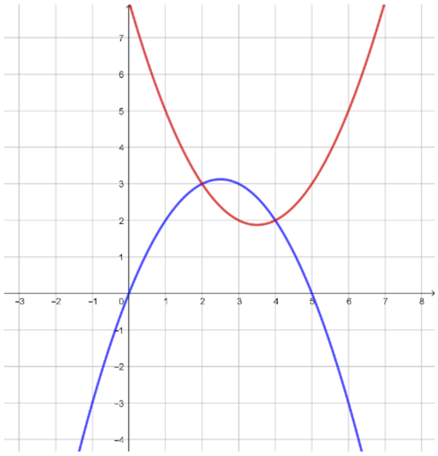
Correction des exercices de révisions pour les élèves ayant choisi Spécialité Mathématiques ou l'option Maths Complémentaires en Terminale

Exercice 1 *Fonction du second degré*

Partie A



1) On sait que le discriminant de f est positif, donc l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions, c'est-à-dire que la courbe de f coupe l'axe des abscisses en deux points.
Le discriminant de g est négatif, donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution, c'est-à-dire que la courbe de g ne coupe pas l'axe des abscisses.
On peut alors distinguer les deux courbes sur le graphique : la fonction f est représentée par la courbe bleue et la fonction g par la courbe rouge.

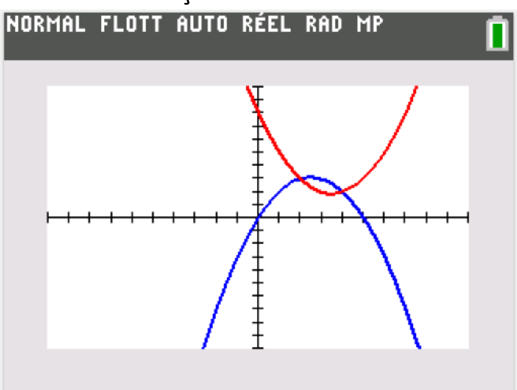
2) f a pour racines 0 et 5 , on peut donc écrire $f(x)$ sous la forme factorisée :
$f(x) = a(x - 0)(x - 5) = ax^2 - 5ax$
On sait que $f(1) = 2$, donc $a\times1^2 - 5a\times1 = 2 \Leftrightarrow a - 5a = 2$
$\Leftrightarrow -4a = 2$
$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$

On a donc $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x$

3) $g(x)$ est de la forme $ax^2 + bx + c$
g a un minimum en $\frac{7}{2}$ donc $-\frac{b}{2a} = \frac{7}{2}$ c'est-à-dire $-b = \frac{7}{2}\times2a$ donc $b = -7a$
On peut donc écrire $g(x) = ax^2 - 7ax + c$

Les courbes de f et de g se coupent aux points $A(2\,;\,3)$ et $B(4\,;\,2)$.
Donc $g(2) = 3$ et $g(4) = 2$
On peut écrire $g(2) = 3 \Leftrightarrow 4a - 14a + c = 3$
$\Leftrightarrow -10a + c = 3$
$\Leftrightarrow c = 3 + 10a$
On peut donc écrire $g(x) = ax^2 - 7ax + 3 + 10a$
Alors $g(4) = 2 \Leftrightarrow 16a - 28a + 3 + 10a = 2$
$\Leftrightarrow -2a = -1$
$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$
On a alors $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 7\times\frac{1}{2}\times x + 3 + 10\times\frac{1}{2}$
L'expression de $g(x)$ est donc $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 8$

4) On peut vérifier les expressions obtenues en traçant les courbes avec une calculatrice :



5) Le sommet de la courbe de f a pour abscisse $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{5}{2}}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{\frac{5}{2}}{-1} = \frac{5}{2}$

et on a $f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}\times\frac{5}{2} = -\frac{25}{8} + \frac{25}{4} = -\frac{25}{8} + \frac{50}{8} = \frac{25}{8}$

Le maximum de f est $\frac{25}{8}$.

Le sommet de la courbe de g a pour abscisse $\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{\frac{7}{2}}{2\times\frac{1}{2}} = \frac{7}{2}$

et on a $f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2}\times\left(\frac{7}{2}\right)^2 - \frac{7}{2}\times\frac{7}{2} + 8 = \frac{49}{8} - \frac{49}{4} + 8 = \frac{49}{8} - \frac{98}{8} + \frac{64}{8} = \frac{15}{8}$

Le minimum de g est $\frac{15}{8}$.

NB : on peut vérifier sur le dessin que ces valeurs ne semblent pas aberrantes.

Partie B

Soit $\mathcal{P}$ la courbe d'équation $y = \frac{1}{2}x^2$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = \frac{7}{2}x - 8$.

Étudier la position relative de ces deux courbes revient à étudier le signe de :

$h(x) = \frac{1}{2}x^2 - \left(\frac{7}{2}x - 8\right) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 8 = g(x)$

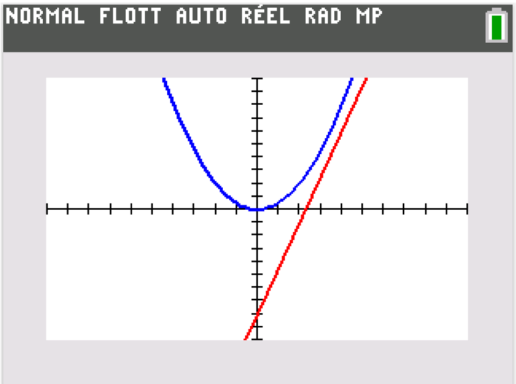
La courbe représentative de la fonction g est au-dessus de l'axe des abscisses d'après la partie A, donc le signe de $g(x)$ est toujours positif.

On peut également le montrer en calculant de discriminant du trinôme : $\Delta = -\frac{15}{4} < 0$ donc g n'admet pas de racine, le trinôme est du signe de $a = \frac{1}{2} > 0$

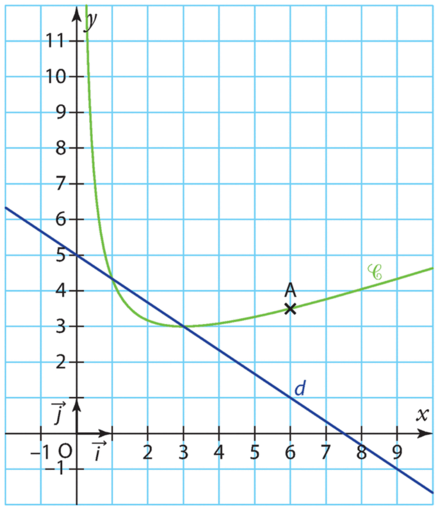
x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$+$

Donc $\mathcal{P}$ est strictement au-dessus de $\mathcal{D}$ sur $\mathbb{R}$

On peut vérifier graphiquement à la calculatrice :



Exercice 2 *Dérivation*



La courbe $\mathcal{C}$ donnée ci-contre est la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + 3x + 9}{3x}$ définie sur l'intervalle $\mathrm{I} =]0\,;\,+\infty[$.

La droite d a pour équation $y = -\dfrac{2}{3}x + 5$.

Le point A d'abscisse 6 est situé sur la courbe $\mathcal{C}$.

1. **a)** $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2 + 3x + 9$ et $v(x) = 3x$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ *(en tant que fonctions polynômes)*, donc dérivables sur I.

De plus, v ne s'annule pas sur I.

$\boxed{\text{Donc } f \text{ est dérivable sur I}}$.

b) $f = \dfrac{u}{v}$ donc $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = 2x + 3$ et $v'(x) = 3$.

Ainsi pour tout réel x de I, $f'(x) = \dfrac{(2x+3) \times 3x - \left(x^2 + 3x + 9\right) \times 3}{(3x)^2}$

$$= \frac{6x^2 + 9x - 3x^2 - 9x - 27}{9x^2}$$

$$= \frac{3x^2 - 27}{9x^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^2 - 9}{3x^2}}$$

2. f est dérivable sur I donc f est dérivable en 6.

Une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 6 est : $y = f'(6)(x - 6) + f(6)$.

Or $f'(6) = \dfrac{6^2 - 9}{3 \times 6^2} = \dfrac{1}{4}$ et $f(6) = \dfrac{6^2 + 3 \times 6 + 9}{3 \times 6} = \dfrac{7}{2}$

D'où $\mathcal{T} : y = \dfrac{1}{4}(x - 6) + \dfrac{7}{2}$

$\mathcal{T} : y = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{3}{2} + \dfrac{7}{2}$

$\boxed{\mathcal{T} : y = \frac{1}{4}x + 2}$

3. **a)** **Le sens de variation de la fonction f se détermine grâce au signe de sa dérivée.**

Pour tout réel x de I, $f'(x) = \dfrac{x^2 - 9}{3x^2}$

Or $3x^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $(x^2 - 9)$.

$x^2 - 9$ est un trinôme du second degré dont les racines sont -3 et 3. (Inutile de calculer le discriminant, les racines sont évidentes !)

D'où le tableau suivant :

x	0		3		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖	↘	3	↗	

car le coefficient devant x^2 est positif

$\boxed{\text{Donc la proposition « } f \text{ est strictement décroissante sur l'intervalle }]0\,;3] \text{ » est } \textbf{vraie}}$.

a) Une tangente est horizontale lorsque son coefficient directeur est nul.

Or f' ne s'annule pas en 2 d'après la question **3a)**.

$\boxed{\text{Donc la proposition « } \mathcal{C} \text{ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 2 » est } \textbf{fausse}}$.

b) D'après le tableau de variation, f admet un minimum égal à 3 atteint en 3.

$\boxed{\text{Donc la proposition « pour tout réel } x \text{ strictement positif, } f(x) \geq 3 \text{ » est \textbf{vraie}}}$.

c) **Pour déterminer la position relative de deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur un intervalle I, on étudie le signe de $f - g$ sur I.**

Pour tout réel x de I, $d(x) = f(x) - \left(-\frac{2}{3}x + 5\right)$

$$= \frac{x^2 + 3x + 9}{3x} + \frac{2}{3}x - 5$$

$$= \frac{x^2 + 3x + 9 + 2x^2 - 15x}{3x}$$

$$= \frac{3x^2 - 12x + 9}{3x}$$

$$= \frac{3\left(x^2 - 4x + 3\right)}{3x}$$

$$d(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x}$$

$x^2 - 4x + 3$ est un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4$.

$\Delta > 0$ donc le trinôme possède deux racines réelles distinctes : $x_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{4}}{2 \times 1} = 1$ et $x_2 = \frac{-(-4) + \sqrt{4}}{2 \times 1} = 3$.

D'où le tableau de signes suivant sur I :

x	0		1		3		$+\infty$
$x^2 - 4x + 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	
x		$+$		$+$		$+$	
$d(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

car 1 > 0

On en déduit que pour tout $x \in [1\,;3]$, $d(x) \leq 0$.

Donc la courbe $\mathcal{C}$ est en-dessous de la droite d sur l'intervalle $[1\,;3]$.

$\boxed{\text{Ainsi la proposition est \textbf{vraie}}}$.

d) Pour déterminer l'abscisse du point d'intersection des droites d et $\mathcal{T}$, on résout l'équation :

$$\frac{1}{4}x + 2 = -\frac{2}{3}x + 5 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x + \frac{2}{3}x = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{11}{12}x = 3$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \times \frac{12}{11}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{36}{11}$$

Or $\frac{36}{11} \approx 3{,}272$. $\boxed{\text{Donc la proposition « les droites } d \text{ et } \mathcal{T} \text{ se coupent au point d'abscisse 3,3 » est \textbf{fausse}}}$.

Exercice 3 *Dérivation*

a) $B'(x) = -3x^2 + 20x + 3000$

$B'(x)$ est un polynôme du second degré avec $a = -3$, $b = 20$ et $c = 3000$, dont le discriminant est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 20^2 - 4 \times (-3) \times 3000 = 36400 = (20\sqrt{91})^2$$

Comme Δ est positif, $B'(x)$ admet 2 racines distinctes :

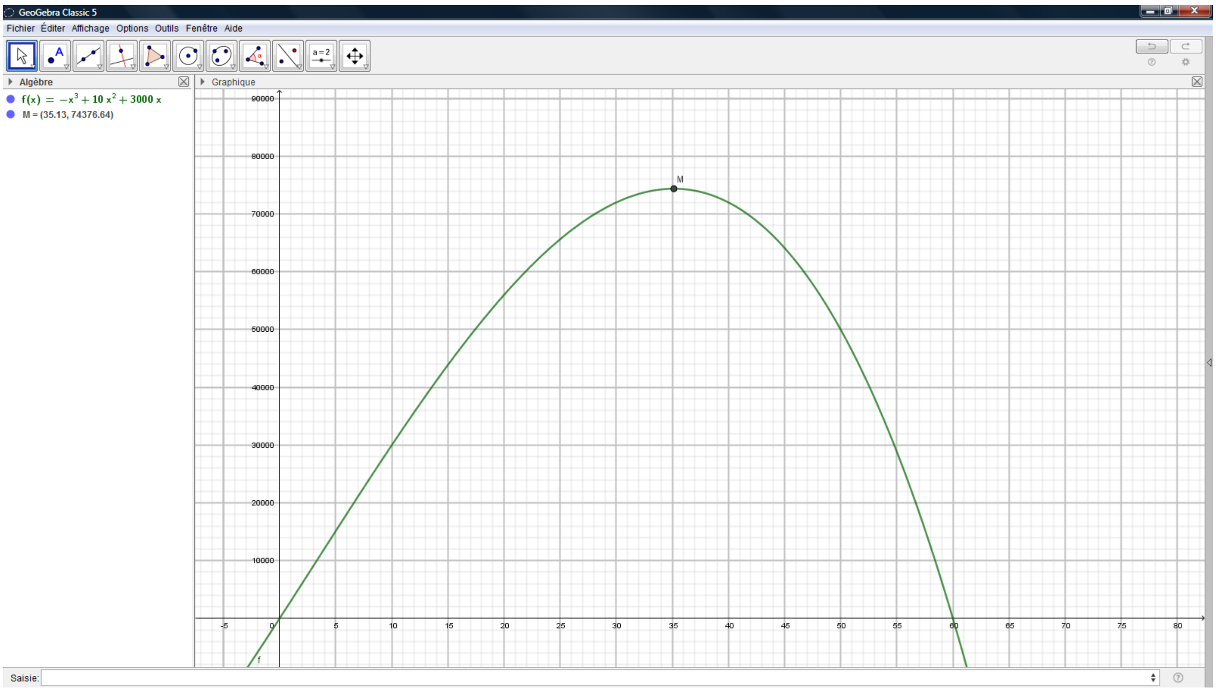
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-20-20\sqrt{91}}{-6} = \frac{10+10\sqrt{91}}{3} \approx 35{,}131$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10-10\sqrt{91}}{3} \approx -28{,}465$

b) Comme B est définie sur [0 ; 50] :

x	0		$\frac{10+10\sqrt{91}}{3}$		50
Signes de $B'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de B	0	$\nearrow$	$B(x_1)$	$\searrow$	50 000

c) $B(\frac{10+10\sqrt{91}}{3}) \approx 74\,377$

<u>L'entreprise doit vendre 35 131 kg de matière première pour réaliser un bénéfice maximum et son bénéfice est de 74 377 €</u>



Exercice 4 ***Suites numériques***

$u_0 = 1000 \qquad u_{n+1} = 1{,}2\,u_n - 100 \qquad (n \in \mathbb{N})$

1. a) Situation

$u_0 = 1000$ grammes c'est l'apport initial de bactéries dans la cuve

Au bout d'une journée $u_1 = 1{,}20\,u_0 - 100 = 1100$ grammes

on multiplie par 1,20 car la masse des bactéries augmente de 20 % en un jour et on retranche 100 car 100 grs de bactéries sont perdus chaque jour lors du remplacement du milieu nutritif

On peut généraliser : $u_{n+1} = 1{,}20\,u_n - 100$

u_n représente donc la masse des bactéries en grammes au bout de n jours

b) Nature de (u_n)

$u_2 = 1{,}2\,u_1 - 100 = 1{,}2 \times 1100 - 100 = 1220$

- $u_2 - u_1 = 120 \qquad u_1 - u_0 = 100 \qquad u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$

La suite (u_n) n'est pas arithmétique

- $\dfrac{u_2}{u_1} \simeq 1{,}109 \qquad \dfrac{u_1}{u_0} = 1{,}100 \qquad \dfrac{u_2}{u_1} \neq \dfrac{u_1}{u_0}$

La suite (u_n) n'est pas géométrique

c) On cherche le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 30\,000$

A l'aide du tableau de valeurs de la calculatrice, on obtient $u_{22} = 28\,103 \qquad u_{23} = 33\,624$ donc

$n = 23$ Au bout de 23 jours la masse de bactéries dépassera 30 kg

d)

```
n ← 0
u ← 1000
Tant que u ≤ 30 000
    u ← 1,20 u − 100
    n ← n+1
Fin tant que
```

2. Variations de (u_n)

On admet que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant 1000$

$u_{n+1} - u_n = 1{,}2\, u_n - 100 - u_n = 0{,}2\, u_n - 100$

donc $u_{n+1} - u_n = 0{,}2\,(u_n - 500)$

OR $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant 1000 \iff u_n - 500 \geqslant 500 > 0$

donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n > 0$; on a démontré que la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - 500$

a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 500$

$v_{n+1} = 1{,}2\, u_n - 100 - 500 = 1{,}2\, u_n - 600$

$v_{n+1} = 1{,}2\left(u_n - \frac{600}{1{,}2}\right) = 1{,}2\,(u_n - 500)$

donc $\boxed{v_{n+1} = 1{,}2\, v_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui démontre que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1{,}2$; de 1er terme $v_0 = u_0 - 500 = 500$

b) $v_n = v_0 \times q^n$ donc $\boxed{v_n = 500 \times 1{,}2^n}$

$u_n = v_n + 500$ donc $\boxed{u_n = 500 \times 1{,}2^n + 500}$

c) Il semble que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

c'est à dire que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$

Exercice 5 ***Fonction exponentielle***

Partie A

1. $d(t) = \mathrm{e}^{3t} \times \mathrm{e}^{1-6t} \times \mathrm{e}^{6t+3} = \mathrm{e}^{3t+1-6t+6t+3} = \mathrm{e}^{3t+4}$
2. $e(t) = \mathrm{e}^{8t-3-(2t+5)} = \mathrm{e}^{6t-8}$
3. $f(t) = \mathrm{e}^{-2t+1+6t+5-(-4t-2)} = \mathrm{e}^{8t+8}$

Partie B

On utilise la formule de dérivée d'un produit de fonctions : $(uv)' = u'v + uv'$.

1. $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + (x+1)\mathrm{e}^x = (2+x)\mathrm{e}^x$
2. $f'(x) = -2 \times \mathrm{e}^x + (-2x+3)\mathrm{e}^x = (-2x+1)\mathrm{e}^x$
3. $f'(x) = 2x \times \mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = (2x+x^2)\mathrm{e}^x$
4. $f'(x) = (2x-3)\mathrm{e}^x + (x^2-3x+1)\mathrm{e}^x = (x^2-x-2)\mathrm{e}^x$

Partie C

1. Pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x > 0$, et en particulier $\mathrm{e}^x \neq 0$. Le domaine de définition de f est donc $\mathbb{R}$.

Et pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1 \times \mathrm{e}^x - x \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{(1-x)\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} = \dfrac{1-x}{\mathrm{e}^x}$.

2. On a $\mathrm{e}^x - 1 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Le domaine de définition est donc $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x \times (\mathrm{e}^x - 1) - (\mathrm{e}^x + 1) \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} = \dfrac{-2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}$.

3. Le domaine de définition de la fonction est $\mathbb{R}$. Et pour tout x réel, $f'(x) = \mathrm{e}^x$.

4. Le domaine de définition de la cette fonction est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Et pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f'(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t \times (t-1) - (\mathrm{e}^t + 1) \times 1}{(t-1)^2} = \dfrac{t\mathrm{e}^t - 2\mathrm{e}^t - 1}{(t-1)^2}$.

Partie D

1. $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-2} \Leftrightarrow x = -2$. Donc l'ensemble des solutions de cette équation est $S = \{-2\}$.
2. $\mathrm{e}^x = \mathrm{e} \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^1 \Leftrightarrow x = 1$. Donc $S = \{1\}$.
3. $\mathrm{e}^{x+2} = \mathrm{e}^3 \Leftrightarrow x + 2 = 3 \Leftrightarrow x = 1$. Donc $S = \{1\}$.
4. $\mathrm{e}^{2x+1} = \mathrm{e} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x+1} = \mathrm{e}^1 \Leftrightarrow 2x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Donc $S = \{0\}$.
5. $\mathrm{e}^x = 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow x = 0$. Donc $S = \{0\}$.
6. $\mathrm{e}^x + 4 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = -4$ ce qui est impossible car la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. L'équation n'admet aucune solution : $S = \varnothing$.
7. $\mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$. Donc $S = \{-1; 1\}$.
8. $\mathrm{e}^{x^2+1} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x^2+1} = \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0$ ce qui est impossible, donc $S = \varnothing$.

Partie E

1. $\mathrm{e}^{x+1} < 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x+1} < \mathrm{e}^0$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et donc $x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$. On a donc $S =]-\infty; -1[$.

2. On a $-3\mathrm{e}^{x^2+4} > 4 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x^2+4} < -\dfrac{4}{3}$. Or, pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x^2+4} > 0$. Cette inéquation n'admet donc aucune solution. On a $S = \varnothing$.
3. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-2x+5} > 0$ car la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $S = \mathbb{R}$.
4. $\mathrm{e}^{x+4} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^{3x}} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x+4} \leqslant \mathrm{e}^{-3x} \Leftrightarrow x + 4 \leqslant -3x$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a donc $x \leqslant -1$. Et donc $S =]-\infty; -1]$.

Partie F

1. Graphiquement, la solution de l'équation $f(x) = 6$ semble être $x = 12$.
2.
   a. f(0) = 7
   b. On a $f(0) = (a \times 0 + b)\mathrm{e}^{-0.2\times 0} = b$.
   c. On a d'un côté $f(0) = 7$ et de l'autre $f(0) = b$ donc $b = 7$.
3.
   a. Le coefficient directeur de la droite (AB) est $\dfrac{14.2 - 7}{2 - 0} = 3.6$.
   b. Pour tout $x \in I$, $f'(x) = a \times \mathrm{e}^{-0.2x} - 0.2(ax + 7)\mathrm{e}^{-0.2x} = (-0.2ax + a - 1.4)\mathrm{e}^{-0.2x}$.
   c. On sait que la droite (AB) est la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x = 0$, son coefficient directeur est donc égal à $f'(0)$. Ainsi, $f'(0) = a - 1.4 = 3.6$ d'où $a = 5$. On a donc $f(x) = (5x + 7)\mathrm{e}^{-0.2x}$.
4.
   a. En utilisant l'expression de f' trouvée en 3.b. on obtient, pour tout $x \in I$, $f'(x) = (-x + 3.6)\mathrm{e}^{-0,2x}$.
   b. Pour tout $x \in I$, $\mathrm{e}^{-0,2x} > 0$. $f'(x)$ est donc du signe de $-x + 3.6$.

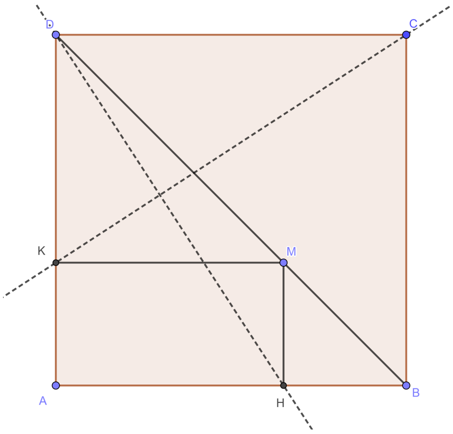
x	0		3.6		25
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f			$25\mathrm{e}^{-0.72}$		
	7	$\nearrow$		$\searrow$	$132\mathrm{e}^{-5}$

   c. Le maximum de f sur I est donc $25\mathrm{e}^{-0.72}$.

Exercice 6 ***Produit scalaire***

Partie A

1.



2. a) D,K et A sont alignés ans le même ordre que D,M et B.

(KM) et (AB) sont toutes 2 perpendiculaires à (DA) alors (KM)//(AB)

Alors d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{DK}{DA} = \frac{KM}{AB} = \frac{DM}{DB}$$

Or DA=AB=1 d'où DK=KM

Or KM=AH car par construction, MKAH est un rectangle.

Donc DK=AH

b) $\overrightarrow{CK}.\overrightarrow{DH} = (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DK}).(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AH})$

$= \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{DK}.\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DK}.\overrightarrow{AH}$

$= 0 - CD \times AH + DK \times DA + 0$ car $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont orthogonaux , de même que $\overrightarrow{DK}$ et $\overrightarrow{AH}$

Et $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires, de sens contraires

Et $\overrightarrow{DK}$ et $\overrightarrow{AH}$sont colinéaires, de même sens

$\overrightarrow{CK}.\overrightarrow{DH} = DK - AH$ car CD=DA=1

$\overrightarrow{CK}.\overrightarrow{DH} = 0$ d'après 2)a)

c) On en déduit que les vecteurs sont orthogonaux . Donc les droites (CK) et (DH) sont perpendiculaires.

d) Les triangles CDK et DAH sont deux triangles rectangles respectivement en D et en A.

De plus, CD=DA=1 et DK=AH d'après 2)a) alors les hypoténuses respectives de CDK et DAH sont égales.

Donc CK=DH.

3. a) Dans le repère orthonormé $(A; B, D)$,

A(0 ; 0) B(1 ;0) D(0 ;1) C(1 ;1) M$(x; y)$ H$(x; 0)$ K$(0; y)$

b) $M(x; y) \in (BD) \Leftrightarrow (\overrightarrow{BM} et\ \overrightarrow{BD}\ sont\ colinéaires)$

$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{BD}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ y & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 - (-1)y = 0$

$\Leftrightarrow x + y - 1 = 0$

(BD) : $x + y - 1 = 0$

c) On a $\overrightarrow{CK}(-1; y-1)$ et $\overrightarrow{DH}(x; -1)$

$\overrightarrow{CK}.\overrightarrow{DH} = x_{\overrightarrow{CK}}x_{\overrightarrow{DH}} + y_{\overrightarrow{CK}}y_{\overrightarrow{DH}} = -x + (y-1)\times(-1) = -x - y + 1 = 0$

car M $\in (BD)$ alors ses coordonnées $(x; y)$ vérifient l'équation de (BD)

Alors les vecteurs $\overrightarrow{CK}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont orthogonaux. Donc les droites (CK) et (DH) sont perpendiculaires

d) $\overrightarrow{CK}(-1; y-1)$ et $\overrightarrow{DH}(x; -1)$

Alors $CK = \sqrt{x_{\overrightarrow{CK}}{}^2 + y_{\overrightarrow{CK}}{}^2} = \sqrt{(-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{1 + (-x)^2} = \sqrt{1 + x^2}$

car $(x; y)$ vérifient $x + y - 1 = 0$ ou encore $y - 1 = -x$

Et $DH = \sqrt{x_{\overrightarrow{DH}}{}^2 + y_{\overrightarrow{DH}}{}^2} = \sqrt{x^2 + (-1)^2} = \sqrt{x^2 + 1}$

Donc CK=DH

Partie B

1. Comme I est le milieu de [AB], alors, d'après le théorème de la médiane,

pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}.\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) = MA^2 + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} = MA^2 + \left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA}\right).\overrightarrow{AB} = MA^2 + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$

Or ABC est un triangle isocèle rectangle en A alors les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux

Donc $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = 0$

Ainsi $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MA^2 + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}$

Alors $MA^2 + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$

De plus, $AB = 6$ alors $\frac{AB^2}{4} = \frac{36}{4} = 9$ alors $MA^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MC} = MI^2 - 9$

2. $MA^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MC} = 12 \Leftrightarrow MI^2 - 9 = 12$

$\Leftrightarrow MI^2 = 21$

$\Leftrightarrow MI = \sqrt{21}$ car MI>0

L'ensemble des points M vérifiant $MA^2 + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MC} = 12$ est donc le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{21}$

Partie C

1. d est perpendiculaire à (AC) alors $\overrightarrow{AC}(5; -2)$ est vecteur normal à d

De plus, tout vecteur $\overrightarrow{BM}$, avec M point de d, est orthogonal à $\overrightarrow{AC}$.

Ainsi :

$M(x; y) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = 0$

$\Leftrightarrow 5x - 2(y + 3) = 0$

$\Leftrightarrow 5x - 2y - 6 = 0$

Une équation cartésienne de d est $d: 5x - 2y - 6 = 0$.

2. H, projeté orthogonal de B sur (AC), est donc le point d'intersection de d et (AC)

Trouver les coordonnées de H revient donc à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 5x - 2y - 6 = 0 & l_1 \\ -2x - 5y + 1 = 0 & l_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25x + 4x - 30 - 2 = 0 & 5l_1 - 2l_2 \\ -4y - 25y - 12 + 5 = 0 & 2l_1 + 5l_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 29x = 32 \\ -29y = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{32}{29} \\ y = \frac{-7}{29} \end{cases}$$

$$S = \left\{\left(\frac{32}{29}; \frac{-7}{29}\right)\right\}$$

Donc H a pour coordonnées $\left(\frac{32}{29}; \frac{-7}{29}\right)$

3. I, milieu de [AC], a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2}\right)$ soit $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$

De plus, $AC = \sqrt{x_{\overrightarrow{AC}}{}^2 + y_{\overrightarrow{AC}}{}^2} = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$ alors $r = \frac{\sqrt{29}}{2}$

Or une équation cartésienne d'un cercle de centre I et de rayon r est :

$$(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = r^2$$

Donc une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est $\mathcal{C} : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{29}{4}$

4. $\left(x_B - \frac{1}{2}\right)^2 + {y_B}^2 = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + (-3)^2 = \frac{1}{4} + 9 = \frac{37}{4} \neq \frac{29}{4}$

Alors B n'appartient pas à $\mathcal{C}$.

5. D'après la formule d'Al-Kashi,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\times AB\times BC\times cos\left(\widehat{ABC}\right)$

Alors $\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\times AB\times BC}$

Or $\overrightarrow{AB}(2;-4)$ alors $AB = \sqrt{{x_{\overrightarrow{AB}}}^2 + {y_{\overrightarrow{AB}}}^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Et $\overrightarrow{BC}(3;2)$ alors $BC = \sqrt{{x_{\overrightarrow{BC}}}^2 + {y_{\overrightarrow{BC}}}^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

D'où $\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{20+13-29}{2\times 2\sqrt{5}\times\sqrt{13}} = \frac{4}{4\sqrt{65}} = \frac{1}{\sqrt{65}} = \frac{\sqrt{65}}{65}$

On en déduit que $\widehat{ABC} = arccos\left(\frac{\sqrt{65}}{65}\right) \approx 82{,}9°$

<u>Remarque</u> : une autre méthode consiste à exprimer le produit scalaire de $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ de 2 façons différentes

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = xx' + yy' = -6 + 8 = 2$

Et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = BA\times BC\times \cos\left(\widehat{ABC}\right) = 2\sqrt{5}\times\sqrt{13}\cos\left(\widehat{ABC}\right)$

D'où $\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BA\times BC} = \frac{2}{2\sqrt{5}\times\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{65}} = \frac{\sqrt{65}}{65}$ *d'où* $\widehat{ABC} = arccos\left(\frac{\sqrt{65}}{65}\right) \approx 82{,}9°$

6. $A_{triangle} = \frac{base\times hauteur}{2}$

$$A_{ABC} = \frac{AC\times BH}{2}$$

Or $\overrightarrow{BH}\left(\frac{32}{29};\frac{-7}{29}+3\right)$ soit $\overrightarrow{BH}\left(\frac{32}{29};\frac{80}{29}\right)$

alors $BH = \sqrt{{x_{\overrightarrow{BH}}}^2 + {y_{\overrightarrow{BH}}}^2} = \sqrt{\left(\frac{32}{29}\right)^2 + \left(\frac{80}{29}\right)^2} = \sqrt{\frac{7424}{29^2}} = \frac{16\sqrt{29}}{29}$

donc $A_{ABC} = \frac{AC\times BH}{2} = \frac{\sqrt{29}\times\frac{16\sqrt{29}}{29}}{2} = 8\ \ cm^2$

7. $\overrightarrow{DA}(-5;0)$ et $\overrightarrow{DC}(0;-2)$

$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC} = x_{\overrightarrow{DA}}x_{\overrightarrow{DC}} + y_{\overrightarrow{DA}}y_{\overrightarrow{DC}} = (-5)\times 0 + 0\times(-2) = 0$

Alors les vecteurs $\overrightarrow{DA}$ *et* $\overrightarrow{DC}$ sont orthogonaux.

Donc le triangle ADC est rectangle en D.

Donc le point D appartient au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AC].

8. On cherche à résoudre le système

$$\begin{cases} y = 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{29}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{29}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{29}}{2} \quad ou \quad x - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{29}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{1+\sqrt{29}}{2} \quad ou \quad x = \frac{1-\sqrt{29}}{2} \end{cases}$$

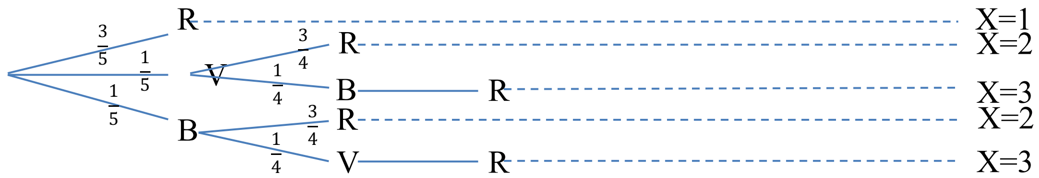
$S = \left\{\left(\frac{1+\sqrt{29}}{2};0\right);\left(\frac{1-\sqrt{29}}{2};0\right)\right\}$

Les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses ont pour coordonnées $\left(\frac{1+\sqrt{29}}{2};0\right)$ et $\left(\frac{1-\sqrt{29}}{2};0\right)$.

Exercice 7 *Probabilités*

Partie A

1. Arbre pondéré modélisant la situation :



2. Les différentes valeurs de X sont donc 1, 2 ou 3.

3. A l'aide de l'arbre on obtient :

- $p(X=1)=\frac{3}{5}$
- $p(X=2)=2\times\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$
- $p(X=3)=2\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$

On peut donc donner la loi de probabilité de X :

$X=x_i$	1	2	3
$p(X=x_i)=p_i$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

4. On considère le script Python suivant :

```python
X = [1, 2, 3]
P = [0.6, 0.3, 0.1]
S = 0
for i in range(3):
    S = S + X[i] * P[i]
print ("S =",S)
```

```
S = 1.5
```

a) S représente l'espérance de X. En effet, $E(x)=\sum_{i=1}^{i=3}p_i\times x_i=S$

b) Si on joue un très grand nombre de fois, on peut, en moyenne, espérer obtenir la boule rouge en 2ème position.

c) Modifier ce script afin qu'il calcule la variance et l'écart-type de X.

```python
from math import*
X = [1,2,3]
P = [0.6,0.3,0.1]
S = 0
V = 0
for i in range(3):
    S = S + P[i]*X[i]
print("S = ",S)
for i in range(3):
    V = V + P[i]*(X[i]-S)*(X[i]-S)
print("V = ",V)
print("ET = ",sqrt(V))
```

```
S = 1.5
V = 0.45
ET = 0.6708203932499369
```

La variance de X est 0,45 et l'écart-type de X est environ de 0,67.

Partie B (Pour les spé math)

On considère les vecteurs de la forme $\binom{a}{b}$où a et b peuvent prendre les valeurs 0 ; 1 ou -1.

On choisit au hasard deux vecteurs de cette forme.

Cela signifie que l'on cherche un quadruplet (a, b, a', b') qui représentera les cordonnées des deux vecteurs de la forme $\vec{u}\binom{a}{b}$ et $\overrightarrow{u'}\binom{a'}{b'}$où a, b, a' et b' peuvent prendre les valeurs 0 ; 1 ou -1.

En imaginant un arbre qui donnerait tous les quadruplets possibles on dénombrerait 81 issues à cette expérience.

1
0
-1

$\underbrace{\text{choix de a}}_{3} \times \underbrace{\text{choix de b}}_{3} \times \underbrace{\text{choix de a'}}_{3} \times \underbrace{\text{choix de b'}}_{3}$ = 81 issues au total.

On est en situation d'équiprobabilité.

1. $\vec{u}\binom{a}{b}$ et $\overrightarrow{u'}\binom{a'}{b'}$ $orthogonaux \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$

$$\Leftrightarrow \underbrace{a = 0 \; et \; b = 0}_{9\;quadruplets} \quad ou \quad \underbrace{a = 0 \; et \; b' = 0}_{9\;quadruplets} \quad ou \quad \underbrace{a' = 0 \; et \; b = 0}_{9\;quadruplets} \quad ou \quad \underbrace{a' = 0 \; et \; b' = 0}_{9\;quadruplets}$$

$$ou \quad \underbrace{a \; et \; a' non \; nuls \; et \; de \; même \; signe \; et \; b \; et \; b' non \; nuls \; et \; de \; signes \; opposés}_{4\;quadruplets} \quad ou$$

$$\underbrace{a \; et \; a' non \; nuls \; et \; de \; signes \; opposés \; et \; b \; et \; b' non \; nuls \; et \; de \; même \; signe}_{4\;quadruplets}$$

Ainsi $p(\mathrm{O}) = \dfrac{nombre \; d'issues \; favorables \; à \; \mathrm{O}}{nombre \; d'issues \; au \; total} = \dfrac{44}{81}$

2. $\vec{u}\binom{a}{b}$ et $\overrightarrow{u'}\binom{a'}{b'}$ $de \; norme \; 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1 \;\; et \;\; a'^2 + b'^2 = 1$

$$\Leftrightarrow \underbrace{|a| = 1 \; et \; b = 0 \; et \; |a'| = 1 \; et \; b' = 0}_{4\;quadruplets} \quad ou \quad \underbrace{a = 0 \; et \; |b| = 1 \; et \;\; a' = 0 \; et \; |b'| = 1}_{4\;quadruplets}$$

$$ou \; \underbrace{|a| = 1 \; et \; b = 0 \; et \;\; a' = 0 \; et \; |b'| = 1'}_{4\;quadruplets} \quad ou \quad \underbrace{a = 0 \; et \; |b| = 1 \; et \; |a'| = 1 \;\; et \; b' = 0}_{4\;quadruplets}$$

Ainsi $p(\mathrm{N}) = \dfrac{16}{81}$

3. $\vec{u}\binom{a}{b}$ et $\overrightarrow{u'}\binom{a'}{b'}$ $orthogonaux \; et \; de \; norme \; 1 \Leftrightarrow aa' + bb' = 0 \; et \; a^2 + b^2 = 1 \;\; et \;\; a'^2 + b'^2 = 1$

$$\Leftrightarrow \underbrace{|a| = 1 \; et \; b = 0 \; et \;\; a' = 0 \; et \; |b'| = 1' \; et \; a \; et \; b' de \; signes \; opposés}_{2\;quadruplets} \quad ou$$

$$\underbrace{a = 0 \; et \; |b| = 1 \; et \; |a'| = 1 \;\; et \; b' = 0 \; et \; b \; et \; a' de \; signes \; opposés}_{2\;quadruplets}$$

Ainsi $p(\mathrm{O} \cap \mathrm{N}) = \dfrac{4}{81}$

D'autre part, $p(\mathrm{O}) \times p(\mathrm{N}) = \dfrac{44}{81} \times \dfrac{16}{81} = \dfrac{704}{6561}$

Donc $p(\mathrm{O} \cap \mathrm{N}) \neq p(\mathrm{O}) \times p(\mathrm{N})$, et les évènements O et N ne sont pas indépendants.

Exercice 8 ***Trigonométrie***

RAPPEL : 180° correspond à π rad

1. α = 12° donc $\boxed{\alpha = \frac{12\pi}{180} = \frac{\pi}{15} \text{ rad}}$ β = 195° donc $\boxed{\beta = \frac{195\pi}{180} = \frac{13\pi}{12} \text{ rad}}$

2. $a = \frac{7\pi}{12}$ rad donc $\boxed{a = \frac{7 \times 180}{12} = 105°}$ $b = \frac{13\pi}{9}$ rad donc $\boxed{b = \frac{13 \times 180}{9} = 260°}$

3. On sait d'un réel x que $x \in [0\,;\pi]$ et $\cos x = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

3.1. Pour tout réel x, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

D'où $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = 1 - \frac{1+2\sqrt{5}+5}{16}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{16-(6+2\sqrt{5})}{16}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{10-2\sqrt{5}}{16} \quad \text{où } \frac{10-2\sqrt{5}}{16} > 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = -\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}} \quad \text{ou} \quad \sin x = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}$$

Or $x \in [0\,;\pi]$ donc $\sin x \geq 0$.

$\boxed{\text{Ainsi la valeur exacte de } \sin x \text{ est : } \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$.

3.2. On sait que $x \in [0\,;\pi]$, $\cos x \geq 0$ et $\sin x \geq 0$. Donc le réel x cherché appartient à l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

$\boxed{\text{Ainsi le réel cherché } x \text{ est égal à } \frac{\pi}{5}}$.

4. On considère la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = \sin(2x) + \cos(x) \times \sin(x)$.

RAPPEL : Une fonction trigonométrique f définie sur ℝ est périodique de période **T** si et seulement si, pour tout réel x, $f(x + \text{T}) = f(x)$.

4.1 f est une fonction trigonométrique définie sur ℝ telle que :

$$f(x+\pi) = \sin(2(x+\pi)) + \cos(x+\pi) \times \sin(x+\pi)$$
$$= \sin(2x+2\pi) + \cos(x+\pi) \times \sin(x+\pi)$$

Or la fonction sinus est 2π-périodique donc $\sin(2x+2\pi) = \sin(2x)$.

De plus, $\cos(x+\pi) = -\cos x$ et $\sin(x+\pi) = -\sin x$.

Donc $f(x+\pi) = \sin(2x) + (-\cos x) \times (-\sin x)$

$$= \sin(2x) + \cos x \times \sin x$$

$$f(x+\pi) = f(x)$$

$\boxed{\text{Donc la fonction } f \text{ est périodique de période } \pi.}$

4.2 • ℝ est centré en 0 ;

• Pour tout réel x, $f(-x) = \sin(-2x) + \cos(-x) \times \sin(-x)$

$$= -\sin(2x) + \cos x \times (-\sin x)$$
$$= -\sin(2x) - \cos x \times \sin x$$
$$= -(\sin(2x) + \cos x \times \sin x)$$
$$f(-x) = -f(x)$$

$\boxed{\text{Donc } f \text{ est une fonction impaire}}$.