Exercices de mathématiques de fin de seconde pour préparer la rentrée en première

Cette partie est destinée à tous les élèves

Lecture graphique

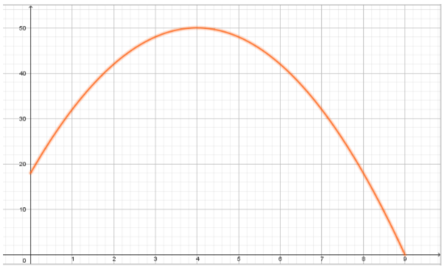
Exercice 1: *Lecture graphique, généralités sur les fonctions*

On modélise la trajectoire d'une fusée de feu d'artifice par la fonction h.

h est la fonction qui exprime la hauteur (en mètre) de la fusée en fonction du temps (en seconde). La représentation graphique de h est l'arc de parabole représenté ci-contre.

La fusée explose 5 secondes après son lancement.

Par lecture graphique :



1) De quelle hauteur est lancée la fusée ? On lit l'ordonnée du point de la courbe sur l'axe des ordonnées **: la fusée est lancée à 19m de haut.**
2) A quelle hauteur, la fusée explose-t-elle ? On lit l'ordonnée du point de la courbe dont l'abscisse est 5: **elle explose à 48m de haut.**
3) Donner le tableau de variations de h. Quelle hauteur maximale va-t-elle atteindre et en combien de temps?

t	0	4	9
Variations de h	18 ↗	50	↘ 0

4) Si la fusée n'avait pas explosé, combien de temps après son lancement serait-elle retombée au sol ? On lit l'abscisse du point de la courbe sur l'axe des abscisses : **elle serait retombé au sol après 9s.**

Exercice 1 Fonctions affines

Les parties A , B , C et D sont indépendantes

PARTIE A

1) Déterminer, en justifiant, la fonction affine f telle que $f(1) = -2$ et $f(-2) = -11$.
2) En déduire $f(11)$

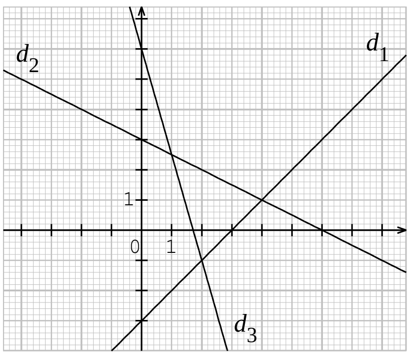
PARTIE B

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 5$

1) Représenter cette fonction affine.
2) Déterminer son tableau de variations.

PARTIE C

A l'aide du graphique ci-contre, donner les solutions des systèmes suivants :



a) $(S_1) : \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 3 \\ y = x - 3 \end{cases}$

b) $(S_2) : \begin{cases} y = -\frac{7}{2}x + 6 \\ y = x - 3 \end{cases}$

c) $(S_3) : \begin{cases} y = -\frac{7}{2}x + 6 \\ y = -\frac{1}{2}x + 3 \end{cases}$

Correction :

PARTIE A

3) f est une fonction affine donc $f(x)$ est de la forme $mx + p$ où m et p sont des réels à déterminer.

   • <u>Détermination de m</u> :

$f\ (1) = \ -2$ et $f\ (-2) = \ -11$ donc $m = \dfrac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)}$; $m = \dfrac{-2 - (-11)}{3}$ soit $m = 3$.

Ainsi $f(x) = 3x + p$.

• Détermination de p :

$f\ (1) = \ -2$. Donc $3 \times 1 + \ p = -2$ soit $p = -2 - 3$; $p = -5$.

Conclusion : $\boxed{\text{la fonction affine } f \text{ telle que } f\ (1) = -2 \text{ et } f\ (-2) = -11 \text{ est définie par } f(x) = 3x - 5}$.

4) $f(11) = 3 \times 11 - 5 = 33 - 5 = 28$ ainsi $\boxed{f(11) = 28}$

PARTIE B

1) ***Rappel : Toute fonction affine est représentée par une droite, il suffit de placer deux points pour représenter graphiquement une telle fonction.***

$f(x) = 3x - 5$

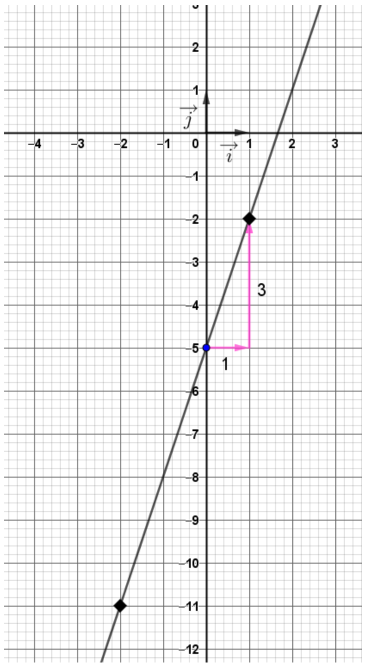
1ere méthode :

f est une fonction affine , on calcule l'image de deux valeurs par exemple $f\ (1) = \ -2$ et $f\ (-2) = \ -11$. La droite représentant cette fonction passe par les points de coordonnées (1 ; – 2) et (– 2 ; – 11).

2éme méthode :

On trace la droite grâce au coefficient directeur et à l'ordonnée à l'origine.

On place le point de coordonnées (0 ; -5) (car -5 est l'ordonnée à l'origine) puis on décale d'une unité vers la droite et on décale de 3 unités vers le haut (car le coef directeur est +3).On obtient ainsi le second point de la droite .



2) f est la fonction affine définie par $f(x) = 3x - 5$.

3 > 0 donc f est croissante sur $\mathbb{R}$. D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f	↗	

3) Pour déterminer le signe de $f(x)$, on détermine d'abord la valeur qui l'annule.

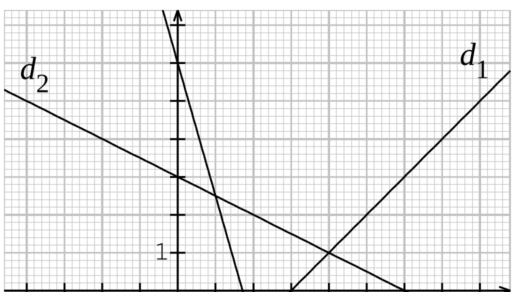
$f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{3}$

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
Signes de $f(x)$		$-$	0	$+$	

PARTIE C

Par lecture graphique, on a :

$d_1 : y = x - 3$ $\quad$ $d_2 : y = -\dfrac{1}{2}x + 3$ $\quad$ $d_3 : y = -\dfrac{7}{2}x + 6$.



a) Le système (S_1) $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 3 \\ y = x - 3 \end{cases}$ regroupe les équations des droites d_1 et d_2.

Ces deux droites sont sécantes au point de coordonnées (4 ; 1).

Donc $\boxed{S = \{(4\,;1)\}}$

b) $\begin{cases} y = -\frac{7}{2}x + 6 \\ y = x - 3 \end{cases}$ $\boxed{S = \{(2\,;-1)\}}$

c) $\begin{cases} y = -\frac{7}{2}x + 6 \\ y = -\frac{1}{2}x + 3 \end{cases}$ $\boxed{S = \{(1\,;2{,}5)\}}$

Calcul algébrique

Exercice 2: Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes

$A(x) = (x-4)(2-x)$ $B(x) = (2x-1)(-3x+1)$ $C(x) = -2(x+3)(2x-4) + 3x$
$D(x) = (2-x^2)(3+x)$

On trouve : $A(x) = -x^2 + 6x - 8$ $B(x) = -6x^2 + 5x - 1$ $C(x) = -4x^2 - x + 24$

$D(x) = -x^3 - 3x^2 + 2x + 6$

Exercice 3: Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes à l'aide d'identités remarquables

$A(x) = (x+2)^2$ $B(x) = (2x-1)^2$

$C(x) = \left(\frac{x}{2} - 2\right)\left(\frac{x}{2} + 2\right)$ $D(x) = \left(3x + \frac{1}{4}\right)^2$

On trouve : $A(x) = x^2 + 4x + 4$ $B(x) = 4x^2 - 4x + 1$ $C(x) = \frac{x^2}{4} - 4$ $D(x) = 9x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{16}$

Exercice 4: Factoriser les expressions suivantes à l'aide d'identités remarquables.

$A(x) = 1 + 6x + 9x^2$ $B(x) = 9x^2 - 36$ $F(x) = (3x-1)^2 - 25$

On trouve : $A(x) = 1^2 + 2 \times 1 \times 3x + (3x)^2 = \boldsymbol{(1+3x)^2}$

$B(x) = (3x)^2 - 6^2 = \boldsymbol{(3x-6)(3x+6)}$

$C(x) = (3x-1)^2 - 5^2 = (3x-1-5)(3x-1+5) = \boldsymbol{(3x-6)(3x+4)}$

Exercice 5: Factoriser les expressions suivantes

A(x)=$(x-4)(2x+3) - (x-4)(x+5) = (x-4)\big((2x+3) - (x+5)\big) = \boldsymbol{(x-4)(x-2)}$

B(x)=$(x-3)(2x+1) + (x-3)^2 + x - 3 = (x-3)\big((2x+1) + (x-3) + 1\big) = \boldsymbol{(x-3)(3x-1)}$

Ecrire les expressions suivantes avec une seule barre de fraction

$$A(x) = \frac{1}{x+2} + 2 = \frac{1 + 2(x+2)}{x+2} = \boldsymbol{\frac{2x+5}{x+2}}$$

$$B(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{x+1} = \frac{x(x+1) - 3 \times 2}{2(x+1)} = \boldsymbol{\frac{x^2+x-6}{2x+2}}$$

Exercice 6: On modélise la trajectoire d'une fusée de feu d'artifice par la fonction h.

h est la fonction qui exprime la hauteur (en mètre) de la fusée en fonction du temps (en seconde). h est définie par :

$$h(t) = -2t^2 + 16t + 18$$

La fusée explose 5 secondes après son lancement.

1) En développant, montrer que h peut également s'écrire :

$$h(t) = -2(t-4)^2 + 50 \text{ ou } h(t) = -2(t-9)(t+1)$$

2) En utilisant la forme la plus adaptée de h, calculer :

a) la hauteur à laquelle est lancée la fusée ,

b) la hauteur à laquelle la fusée explose,

c) la hauteur maximale atteinte et en combien de temps,

d) si la fusée n'avait pas explosé, le temps après son lancement au bout duquel la fusée serait retombée au sol.

Correction

1) On a : <u>h (t) = – 2t² + 16 t + 18</u>. Et :

$-2(t-4)^2 + 50 = -2(t^2 - 8t + 16) + 50$
$= -2t^2 + 16t - 32 + 50$
$= -2t^2 + 16t + 18$

$-2(t-9)(t+1) = -2(t^2 + t - 9t - 9)$
$= -2(t^2 - 8t - 9)$
$= -2t^2 + 16t + 18$

Ainsi $h(t) = -2(t-4)^2 + 50$ et $h(t) = -2(t-9)(t+1)$.

2) La fusée est lancée à l'instant t = 0.
A l'aide de la forme développée, on obtient h (0) = 18.
Donc la fusée est lancée à 18 m de hauteur.

3)

t	0	4	5
Variations de h	18 ↗	50	↘ 48

La hauteur maximale de la fusée est de 50 m.

4) On résout l'équation h (t) = 0. *On utilise donc la forme factorisée.*
$h(t) = 0 \Leftrightarrow -2(t-9)(t+1) = 0$
$\Leftrightarrow t - 9 = 0$ ou $t + 1 = 0$
$\Leftrightarrow t = 9$ ou $t = -1$
Or t > 0. Donc la fusée serait retombée au sol 9 s après son lancement si elle n'avait pas explosé.

Equation et inéquations

Exercice 7: Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

$(E_1): 2x + 1 > 3$ $\quad$ $(E_2): 3x - 2 \leq 7$
$(E_3): -5x + \frac{1}{2} \geq 3$ $\quad$ $(E_4): 2 - x < 5$

Exercice 8: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $x^2 = 25$
2. $5x + 8 = 6 - 3x$
3. $(2x-3)(7-5x) = 0$
4. $x^2 + 5x = 0$
5. $7 + 4x \geq 2x - 17$
6. $8x + \frac{1}{3} = 2$
7. $-6x + 3 > 8x - 2$

Correction

1. $x^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+5) = 0 \Leftrightarrow x = 5 \text{ ou } x = -5$
   $S = \{-5; 5\}$
2. $5x + 8 = 6 - 3x \Leftrightarrow 5x + 3x = 6 - 8 \Leftrightarrow 8x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$
   $S = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$
3. $(2x-3)(7-5x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0.$ ou $7 - 5x = 0$
   $\Leftrightarrow 2x = 3.$ ou $-5x = -7$
   $\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ ou $x = \frac{7}{5}$
   $S = \left\{\frac{3}{2}; \frac{7}{5}\right\}$
4. $x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(x+5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -5$
   $S = \{0; -5\}$
5. $7 + 4x \geq 2x - 17 \Leftrightarrow 4x - 2x \geq -17 - 7 \Leftrightarrow 2x \geq -24 \Leftrightarrow x \geq \frac{-24}{2} \Leftrightarrow x \geq -12$ $\quad$ $S = [-12\,;\,+\infty[$
6. $8x + \frac{1}{3} = 2 \Leftrightarrow 8x = 2 - \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{6}{3} - \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$

$$S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$$

7. $-6x + 3 > 8x - 2 \Leftrightarrow -6x - 8x > -2 \Leftrightarrow -14x > -5 \Leftrightarrow x < \frac{-5}{-14} \Leftrightarrow x < \frac{5}{14}$ $\quad S = \left]-\infty\,;\frac{5}{14}\right[$

Exercice 9: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivante (on se ramènera si nécessaire à un produit de facteur égal à zéro) :

(E_1): $(x+3)(2x-4) = 0$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul , donc :

$x + 3 = 0$ ou $2x - 4 = 0$. On trouve alors x=-3 ou x=2. Donc $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{-3}; \mathbf{2}\}$

(E_2): $(x+1)(x-6) = (x+1)(2x-7)$

$$\begin{aligned}(x+1)(x-6) = (x+1)(2x-7) &\Leftrightarrow (x+1)(x-6) - (x+1)(2x-7) = 0\\ &\Leftrightarrow (x-1)\big((x-6) - (2x-7)\big) = 0\\ &\Leftrightarrow (x-1)(-x+1) = 0\end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul , donc :

$x - 1 = 0$ ou $-x + 1 = 0$. On trouve alors x=1 ou x=1. Donc $\boldsymbol{S} = \{\mathbf{1}\}$

(E_3): $(x-6)(2x+3) - 2(x-6) = 0$

$$\begin{aligned}(x-6)(2x+3) - 2(x-6) = 0 &\Leftrightarrow (x-6)\big((2x+3) - 2\big) = 0\\ &\Leftrightarrow (x-6)(2x+1) = 0\end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul , donc :

$x - 6 = 0$ ou $2x + 1 = 0$. On trouve alors x=6 ou x=-1/2. Donc $\boldsymbol{S} = \left\{\mathbf{6}; -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right\}$

Exercice 10: Résoudre, à l'aide d'un tableau de signes, les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

(E_1): $\frac{1-x}{x} < 0$ $\qquad$ (E_2): $\frac{x-6}{7+x} \geq 0$

(E_3): $\frac{1-x}{x} + 1 > 0$ $\qquad$ (E_4): $\frac{x-6}{7+x} \leq -1$

(E_5): $\dfrac{(-6x+2)(x+7)}{x^2} > 0$

Correction

Tableau de signes directement pour $(E_1), (E_2), (E_5)$

Pour (E_1) :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{1-x}{x}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$S =]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$

Pour (E_2) :

x	$-\infty$		-7		6		$+\infty$
$x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
$7+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-6}{7+x}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$S =]-7; 6]$

Pour (E_3) :

$$(E_3): \frac{1-x}{x} + 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{1-x-x}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{x} > 0$$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$1-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{1-2x}{x}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

$S =]0; \frac{1}{2}[$

Pour (E_5) :

(E_4): $\dfrac{x-6}{7+x} \leq -1 \Leftrightarrow \dfrac{x-6}{7+x} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-6+7+x}{7+x} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{7+x} \leq 0$

x	$-\infty$		-7		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$7+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{2x+1}{7+x}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

$S =]-7; -\frac{1}{2}]$

Pour (E_5) :

x	$-\infty$		-7		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-6x+2$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+7$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$\frac{(-6x+2)(x+7)}{x2}$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

$S =]-7; 0[\cup]0; \frac{1}{3}[$

Exercice 11: Résoudre les systèmes suivants :

$(S_1): \begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ $\quad (S_2): \begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ 3x + 5y = 7 \end{cases}$

$(S_3): \begin{cases} 3x + y = -1 \\ 2x + 4 = 0 \end{cases}$ $\quad (S_4): \begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 3x - 6y = -9 \end{cases}$

Correction

$(S_1): \begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

$ab' - a'b = 3 \times 2 - 1 \times (-4) = 6 + 4 = 10 \neq 0$

Alors ce système admet un unique couple solution.

Résolution algébrique par substitution :

$(S_1): \begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ x = 8 - 2y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(8 - 2y) - 4y = -6 \\ x = 8 - 2y \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 24 - 6y - 4y = -6 \\ x = 8 - 2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -10y = -30 \\ x = 8 - 2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 8 - 2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 8 - 2 \times 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

$S = \{(2; 3)\}$

$(S_2): \begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ 3x + 5y = 7 \end{cases}$

$ab' - a'b = 4 \times 5 - 3 \times 3 = 20 - 9 = 11 \neq 0$

Alors ce système admet un unique couple solution.

Résolution algébrique par combinaison linéaire :

Pour éliminer les x, on multiplie la 1ère équation par 3 et la 2e par 4, puis on soustrait membre à membre les 2 équations.

$$(S_2): \begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ 3x + 5y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x + 9y = 6 \\ 12x + 20y = 28 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12x + 9y - 12x - 20y = 6 - 28 \\ 12x + 20y = 28 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -11y = -22 \\ 12x + 20y = 28 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ 12x + 20y = 28 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ 12x + 20 \times 2 = 28 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ 12x = -12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

$S = \{(-1; 2)\}$

$(S_3): \begin{cases} 3x + y = -1 \\ 2x + 4 = 0 \end{cases}$

$ab' - a'b = 3 \times 0 - 2 \times 1 = -2 \neq 0$

Alors ce système admet un unique couple solution.

Résolution algébrique par substitution :

$$(S_3): \begin{cases} 3x + y = -1 \\ 2x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = -1 \\ 2x = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(-2) + y = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 + 6 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$S = \{(-2;5)\}$$

(S_4): $\begin{cases} -x+2y=3 \\ 3x-6y=-9 \end{cases}$

$ab' - a'b = -1 \times (-6) - 3 \times 2 = 0$

Alors ce système admet soit aucun couple-solution , soit une infinité de couples solutions.

Or on passe de la 1ère équation à la 2e en multipliant chaque membre par -3, alors ces 2 équations sont équivalentes et le système admet une infinité de couples solutions. Les solutions sont les coordonnées des points de la droite d'équation $-x + 2y = 3$.

Remarque : le système $\begin{cases} -x+2y=3 \\ 3x-6y=2 \end{cases}$ n'admet aucun couple-solution car $3\times(-3) \neq 2$

Cette partie est destinée principalement aux élèves qui prennent la spécialité mathématiques en première.

Equations de droites

Exercice 12: Equations cartésienne

Soit $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ un repère du plan, $A(1;2)$, $B(-1;3)$ et $C(2;2)$.

1) Donner une équation cartésienne de la droite (AB).

$$M(x;y) \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \textit{ et } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \textit{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ y-2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1 \times (x-1) - (-2)(y-2) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 5 = 0$$

Donc (AB): $x + 2y - 5 = 0$

2) Donner une équation cartésienne de la droite (AC).

$y_A = y_C = 2$, donc la droite (AC) a pour équation $\boldsymbol{y = 2}$

3) Donner une équation cartésienne de la droite passant par C et parallèle à (AB).

Ici, il faut $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ colinéaires, on adapte alors le 1), on trouve : $\boldsymbol{x + 2y - 6 = 0}$.

4) Donner une équation cartésienne de la droite passant par B et parallèle à l'axe des ordonnées.

Puisque que cette droite est parallèle à l'axe des ordonnées elle a pour équation $x = x_B$, donc $\boldsymbol{x = -1}$.

Exercice 13: ***Equations de droites et système***

Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant.

(S) est le système $\begin{cases} 3x-2y-12=0 \\ 2x-7y+26=0 \end{cases}$

Affirmations :

1. Le couple $(10;9)$ vérifie la première équation.
2. Le couple $(10;9)$ est solution du système.
3. Le système (S) a une infinité de couples solutions.
4. Un couple $(8\,;\,n)$ où n est un nombre entier, est l'unique solution du système.
5. Dans un repère orthonormé, les droites d'équations $3x - 2y - 12 = 0$ et $2x - 7y + 26 = 0$ sont sécantes.

Correction

1. Le couple (10 ; 9) vérifie la première équation : **affirmation vraie**.
En effet, 3 × 10 – 2 × 9 – 12 = 30 – 18 – 12 = 0.

2. Le couple (10 ; 9) est solution du système. : **affirmation fausse**.
En effet, 2 × 10 – 7 × 9 + 26 = 20 – 63 + 26 = – 17. Et – 17 ≠ 0.
Donc le couple (10 ; 9) ne vérifie pas la 2ème équation.
Ainsi le couple (10 ; 9) n'est pas solution du système.

3. Le système (S) a une infinité de couples solutions : **affirmation fausse**.
En effet, (10 ; 9) n'est pas solution du système. Donc le système (S) n'admet pas une infinité de solution.

4. Un couple (8 ; n) où n est un nombre entier, est l'unique solution du système : **affirmation vraie.**

1ère méthode :

En effet, puisque le système (S) n'a pas une infinité de solution. Soit il n'en a pas, soit il en a une seule.

Remplaçons x par 8 dans chaque des équations afin de déterminer la valeur de y.

$3 \times 8 - 2y - 12 = 0 \Leftrightarrow 2y = 12 \Leftrightarrow y = 6$

$2 \times 8 - 7y + 26 = 0 \Leftrightarrow -7y = -42 \Leftrightarrow y = 6$

Donc le couple (8 ; 6) est une solution du système (S) et elle est unique de par la remarque faite ci-dessus.

Ainsi un couple (8 ; n) où n est un nombre entier, est l'unique solution du système.

***2ème méthode* : On résout le système par combinaisons linéaires**

$$\begin{cases} 3x - 2y - 12 = 0 & (E_1) \\ 2x - 7y + 26 = 0 & (E_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 4y - 24 = 0 & 2(E_1) \\ 6x - 21y + 78 = 0 & 3(E_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 17y - 102 = 0 & 2(E_1) - 3(E_2) \\ 3x - 2y - 12 = 0 & (E_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 17y - 102 = 0 \\ 3x - 2y - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{102}{17} = 6 \\ 3x - 2 \times 6 - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ x = 8 \end{cases}$$

Donc $S = \{(8\,;6)\}$. Ainsi un couple (8 ; n) où n est un nombre entier, est l'unique solution du système.

5. Dans un repère orthonormé, les droites d'équations $3x - 2y - 12 = 0$ et $2x - 7y + 26 = 0$ sont sécantes : **affirmation vraie.**

1ère méthode : d'après la question précédente, on sait que le système (S) admet un unique couple solution. Géométriquement, cela signifie que les droites sont sécantes.

2ème méthode :
On a : $3 \times (-7) - 2 \times (-2) = -21 + 4 = -17$. Et $-17 \neq 0$
Donc les droites d'équations $3x - 2y - 12 = 0$ et $2x - 7y + 26 = 0$ sont sécantes.
On applique la propriété suivante :

Soient deux droites d et d' d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ où a, b, c, a', b' et c' sont des réels.

Les droites **d et d' sont sécantes** si. et seulement si. $\boldsymbol{ab' - a'b \neq 0}$.

Exercice 14: Mise en équation et système

À la boulangerie, Tom achète deux croissants et quatre pains au chocolat pour 6,90 €. Dans la même boulangerie, Rose paie 4,10 € pour un pain au chocolat et trois croissants. Gaëlle veut acheter neuf croissantes et sept pains au chocolat dans cette boulangerie.

Combien va-t-elle devoir payer ? soit x le prix d'un croissant et y celui d'un petit pain, on a alors :

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6{,}9 \\ 3x + y = 4{,}1 \end{cases}$$

On résout ce système :

$$\begin{cases} 2x+4y=6{,}9 \\ 3x+y=4{,}1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=6{,}9 \\ y=4{,}1-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4(4{,}1-3x)=6{,}9 \\ y=4{,}1-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10x+16{,}4=6{,}9 \\ y=4{,}1-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10x=-9{,}5 \\ y=4{,}1-3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0{,}95 \\ y=4{,}1-3*0{,}95=1{,}25 \end{cases}$$

Un croissant coûte donc 0,95€ et un petit pain coûte 1,25€.

Géométrie et repérage dans le plan

Exercice 15: Outil vectoriel

Compléter les phrases suivantes :

1) Si $\overrightarrow{\mathrm{IJ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ alors **IPOJ** est un parallélogramme.

2) Si $\overrightarrow{\mathrm{EF}} = \overrightarrow{\mathrm{FH}}$ alors F est **milieu** du segment [EH].

3) Si $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{DB}}$ alors les segments **[AB]** et **[CD]** ont le même milieu.

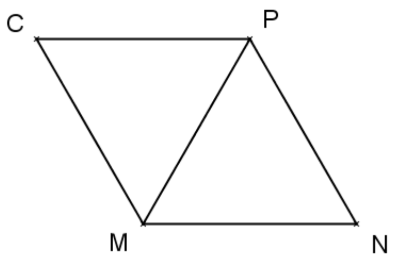
4) Si la translation qui transforme M en N transforme aussi R en S, alors $\overrightarrow{\mathrm{MR}} = \overrightarrow{\mathbf{NS}}$

5) Si $\overrightarrow{\mathrm{TU}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{WV}}$ sont opposés, alors $\overrightarrow{\mathrm{VW}} = \overrightarrow{\mathbf{TU}}$

Exercice 16: Outil vectoriel

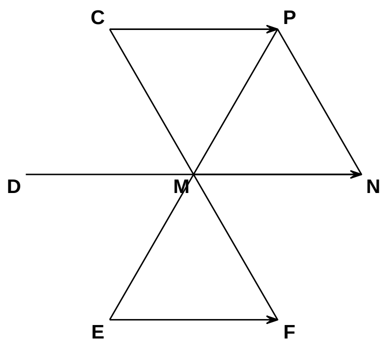
On complétera la construction sur la figure donnée ci-dessous en laissant apparents les traits de construction.

Soient MNP et MPC deux triangles équilatéraux.



1) Démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \overrightarrow{\mathrm{CP}}$. MNP et MPC étant équilatéraux, on a CP=CM=PM=PN=NM, donc les quadrilatère CPNM est un losange (donc aussi un parallélogramme) donc $\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \overrightarrow{\mathrm{CP}}$.

2) Construire les points D, E et F symétriques respectifs de N, P et C par rapport à M.



3) Démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \overrightarrow{\mathrm{EF}}$. Comme C et P ont pour symétriques respectifs F et E par rapport à M, alors les segments [CF] et [PE] ont le même milieu M, d'où CPFE est un parallélogramme, et donc $\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \overrightarrow{\mathrm{EF}}$.

4) Compléter les égalités suivantes en n'utilisant que des noms de points présents sur la figure :

a) $\overrightarrow{\mathrm{MN}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}} = \overrightarrow{\mathbf{MP}}$ **b)** $\overrightarrow{\mathrm{MN}} + \overrightarrow{\mathrm{MC}} + \overrightarrow{\mathrm{ME}} = \overrightarrow{\mathrm{MP}} + \overrightarrow{\mathrm{ME}} = \vec{\mathbf{0}}$

c) $\overrightarrow{\mathrm{MN}} + \overrightarrow{\mathrm{MP}} = \overrightarrow{\mathbf{EN}}$ **d)** $\overrightarrow{\mathrm{MC}} - \overrightarrow{\mathrm{EM}} = \overrightarrow{\mathbf{FE}}$

Correction

Exercice 17:

Soit (O ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$) un repère, on considère les points A (2 ; 3), B (7 ; 4) et C (12 ; 5).

Les points A, B et C sont-ils alignés ? (Justifier)

Correction

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}10\\2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$. Les vecteur $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont donc colinéaires, donc les trois points A, B et C sont alignés.

Exercice 18: outil vectoriel

Soit ABC un triangle. On considère le point D tel que ABDC soit un parallélogramme et E tel que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

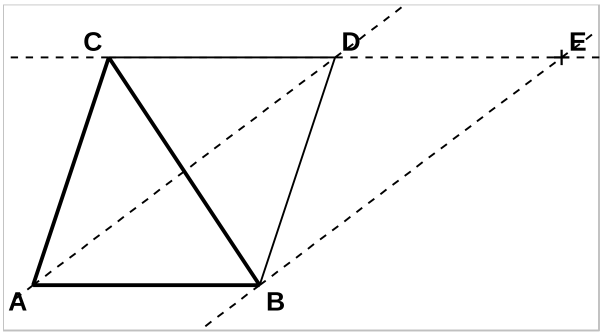
1) Faire une figure.

2) Démontrer que C, D et E sont alignés.

3) Démontrer que (BE) // (AD).

Correction

1)



2) $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

D'après la relation de Chasles, on a : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Donc $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{AB}$.

De plus, ABDC est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Ainsi $\underline{\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{CD}}$.

Par conséquent, les **vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CD}$** sont **colinéaires**.

Donc les points C, E et D sont alignés.

3) On a démontré que $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{CD}$. Donc D est le milieu de [CE].

Par conséquent $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DE}$.

De plus $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ puisque ABDC est un parallélogramme.

Donc $\underline{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}}$.

Ainsi **ABED est un parallélogramme**. Donc (AD) est parallèle à (BE).

Exercice 19: Outil vectoriel

On considère un carré OBCD.

1) Construire les point E et F tels que :

$\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$.

2) On pose $\vec{\imath} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OD}$ puis on se place dans le repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

a) Donner les coordonnées de O, B, D et C dans ce repère.

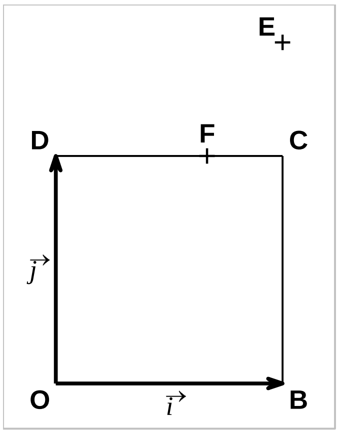
b) Calculer les coordonnées de E et F dans $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

c) Démontrer que $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OF}$ sont colinéaires.

d) Que peut-on en déduire ?

Correction

1) On considère un carré OBCD. $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$



2) On pose $\vec{\imath} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OD}$ puis on se place dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

e) Dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on a : O(0 ; 0), B(1 ; 0), D(0 ; 1) et C(1 ; 1).

f) **Méthode à connaître : Pour déterminer les coordonnées du points E dans le repère (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$), il suffit d'exprimer le vecteur $\overrightarrow{OE}$ en fonction des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$. Les coefficients se trouvant devant les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ correspondent respectivement à l'abscisse et à l'ordonnée du point E.**

• D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CE}$.

OBCD est un carré. Donc $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OD}$.

Ainsi $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$

$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{OD}$

$\overrightarrow{OE} = \vec{\imath} + \frac{3}{2}\vec{\jmath}$

Donc E a pour coordonnées $\left(1 ; \frac{3}{2}\right)$.

• D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CF}$.

Ainsi $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$.

OBCD étant un carré, on a $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BO} = -\overrightarrow{OB}$.

D'où $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$

$\overrightarrow{OF} = \frac{2}{3}\vec{\imath} + \vec{\jmath}$

Donc F a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3} ; 1\right)$.

g) E et F ont pour coordonnées respectives $\left(1 ; \frac{3}{2}\right)$ et $\left(\frac{2}{3} ; 1\right)$ dans le repère $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Donc $\overrightarrow{OE}\begin{pmatrix}1 \\ 3/2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OF}\begin{pmatrix}2/3 \\ 1\end{pmatrix}$.

On constate que $\overrightarrow{OF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OE}$. Donc $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OF}$ sont colinéaires.

h) $\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OF}$ sont colinéaires et ont le point O en commun. Donc les points O, E et F sont alignés.

Equations de droites

Exercice 20: Dans chaque cas, donner la réponse exacte.

Dans un repère orthonormé, d est la droite d'équation $-7x - 2y - 10 = 0$.

1) La droite d passe par le point de coordonnées : $\left(-\frac{10}{7} ; 0\right)$

a) (5 ; 0) b) (0 ; 5) c) $\left(0 ; -\frac{10}{7}\right)$ d) $\left(-\frac{10}{7} ; 0\right)$

2) Les coordonnées d'un vecteur directeur de d sont : (2 ; – 7)

a) (−7;−2) b) (-2 ;-7) c) (2 ;-7) d) (2 ;7)

3) La pente (ou le coefficient directeur) de d est : $-\frac{7}{2}$

~~a) $y = \frac{-2}{7}x - \frac{10}{7}$ c) $y = -\frac{7}{2}x - 5$~~ erreur d'énoncé

~~b) $y = -\frac{7}{2}x - 10$ d) $2y = -7x - 10$~~

4) Une autre équation cartésienne de d est : $7x + 2y - 10 = 0$

a) $7x + 2y - 10 = 0$ c) $-2x - 7y - 10 = 0$

b) $14x + 4y + 20 = 0$ d) $-7x - 2y = 0$

Exercice 21: Dans chaque cas, donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier.

Dans un repère orthonormé, d_1 : $-3x - 5y + 36 = 0$ et d_2 : $6x + 10y - 20 = 0$ sont deux droites.

(S) est le système $\begin{cases} -3x - 5y + 36 = 0 \\ 6x + 10y - 20 = 0 \end{cases}$.

1) un point de d_1 est

a) $\boldsymbol{A\left(0;\frac{35}{5}\right)}$ b) $\boldsymbol{B\left(5;\frac{21}{5}\right)}$ c) $C(-7;11)$ d) $\boldsymbol{D(-3;9)}$

2) un vecteur directeur de d_2 est

a) $\boldsymbol{\overrightarrow{u_1}(1 ;-0,6)}$ c) $\overrightarrow{u_3}(100;-6)$

b) $\boldsymbol{\overrightarrow{u_2}(5;-3)}$ d) $\boldsymbol{\overrightarrow{u_4}(15;-9)}$

3) le système (S)

a) n'a aucun couple solution

b) a un seul couple solution

c) a deux couples solutions

d) a une infinité de couples solutions

4) les droites d_1 et d_2 sont

a) strictement parallèles

b) confondues

c) sécantes

Programmation et langage Python

Exercice 22: On donne les trois fonction en Python suivante :

```
def pour(n) :
  x=2
  for i in range(n) :
    x=x+i
  return x
```

```
def si(valeur) :
  if valeur>7 :
    valeur=valeur-7
  else :
    valeur=valeur+7
  return 2*valeur
```

```
def tantque(x) :
  x=0
  while x**2<x :
    x=x+1
  return x
```

Que renvoient les expressions suivantes :

a) pour(3). **Elle renvoie 5**

b) si(4) puis si(9). si(4) renvoie 2*(4+7) donc **22**, et si(9) 2*(9-7) donc **4**
c) tantque(9) elle renvoie **0** (la condition du tant que n'est jamais satifaite.