# Correction des exercices de révisions pour les élèves ayant choisi Spécialité Mathématiques ou l'option Maths Complémentaires en Terminale

## Fonction du second degré

### Exercice 1

**a)** $f$ est une fonction polynôme du second degré avec $a = 5$ ; $b = -2$ et $c = -7$.

$a > 0$ et $-\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \times 5} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

Donc $f$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{5}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{5}\,;\,+\infty\right[$.

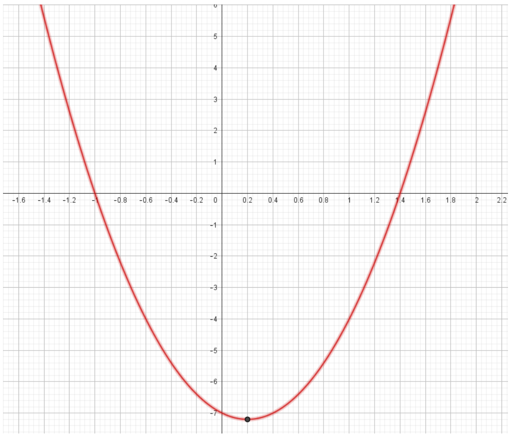
Et, $f\left(\frac{1}{5}\right) = 5 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 - 2\times\frac{1}{5} - 7 = \frac{1}{5} - \frac{2}{5} - 7 = -\frac{1}{5} - \frac{35}{5} = \frac{-36}{5}$

D'où le tableau de variations suivant :

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{1}{5}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | ↘ | $\frac{-36}{5}$ | ↗ |

**b)** On en déduit que $\boxed{f \text{ admet un minimum égal à } \frac{-36}{5} \text{ atteint en } \frac{1}{5}}$.

**c)** Représentation de la courbe $\mathcal{P}$ :



### Exercice 2

**1)** $f$ a pour racines 0 et 5 , on peut donc écrire $f(x)$ sous la forme factorisée :

$f(x) = a(x - 0)(x - 5) = ax^2 - 5ax$

On sait que $f(1) = 2$, donc $a \times 1^2 - 5a \times 1 = 2 \Leftrightarrow a - 5a = 2$

$\Leftrightarrow -4a = 2$

$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$

On a donc $\boxed{f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x}$.

**2)** • $g(x)$ est de la forme $ax^2 + bx + c$.

$g$ a un minimum en $\frac{7}{2}$ donc $-\frac{b}{2a} = \frac{7}{2}$ c'est-à-dire $-b = \frac{7}{2} \times 2a$ donc $b = -7a$

On peut donc écrire $g(x) = ax^2 - 7ax + c$.

• Les courbes de $f$ et de $g$ se coupent aux points $A(2\,;\,3)$ et $B(4\,;\,2)$.

Donc $g(2) = 3$ et $g(4) = 2$.

On peut écrire $g(2) = 3 \Leftrightarrow 4a - 14a + c = 3$

$\Leftrightarrow -10a + c = 3$

$\Leftrightarrow c = 3 + 10a$

Ainsi $g(x) = ax^2 - 7ax + 3 + 10a$

Et, $g(4) = 2 \Leftrightarrow 16a - 28a + 3 + 10a = 2$

$\Leftrightarrow -2a = -1$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

On a alors $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 7 \times \frac{1}{2} \times x + 3 + 10 \times \frac{1}{2}$

$\boxed{\text{L'expression de } g(x) \text{ est donc } g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 8}$.

**Exercice 3**

Soit $\mathcal{P}$ la courbe d'équation $y = \frac{1}{2}x^2$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = \frac{7}{2}x - 8$.

Étudier la position relative de ces deux courbes revient à étudier le signe de :

$$h(x) = \frac{1}{2}x^2 - \left(\frac{7}{2}x - 8\right) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 8$$

$h(x)$ est un trinôme du second degré avec $a = \frac{1}{2}$ ; $b = -\frac{7}{2}$ et $c = 8$.

$\Delta = b^2 - 4ac$ ; $\Delta = \left(-\frac{7}{2}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times 8$ ; $\Delta = -\frac{15}{4}$

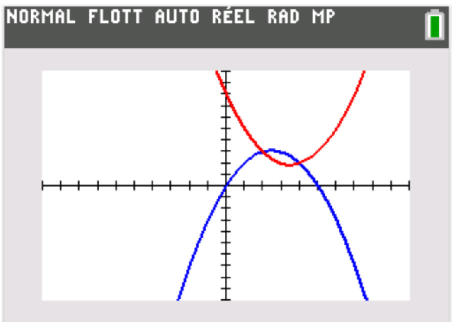
$\Delta < 0$ donc $h(x)$ n'admet pas de racine. Ainsi le trinôme est du signe de $a$.

Donc pour tout réel $x$, $h(x) > 0$.

| $x$ | $-\infty$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $h(x)$ | $+$ |

$\boxed{\text{Ainsi } \mathcal{P} \text{ est strictement au-dessus de } \mathcal{D} \text{ sur } \mathbb{R}}$.

On peut vérifier graphiquement à la calculatrice :




**Exercice 4**

**a)** $2x^2 - 4x - 6 = 0$ est une équation du 2nd degré où $a = 2$ ; $b = -4$ et $c = -6$.

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 16 + 48 = 64$

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 8}{2 \times 2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 8}{2 \times 2} = 3$$

$\boxed{\text{Donc } S = \{-1\,;\,3\}}$.

**b)** $x^2 - 6x + 8$ est un trinôme du 2nd degré de discriminant : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 36 + 32 = 4$

$\Delta > 0$ donc le trinôme admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-6) - \sqrt{4}}{2 \times 1} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-6) + \sqrt{4}}{2 \times 1} = 4$$

De plus $a > 0$, d'où le tableau de signes suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | 2 | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2 - 6x + 8$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

$\boxed{\text{Ainsi } S = ]2\,;4[}$ .

## Étude de signes

**Méthode : Pour étudier le signe d'un produit ou d'un quotient on établit son tableau de signes.**

**1)** $(3x+2)(x^2+1)(1-x)$ est sous la forme d'un produit, on établit donc son tableau de signes.

- $(3x+2)(x^2+1)(1-x) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2 = 0$ ou $x^2 + 1 = 0$ ou $1 - x = 0$

  $\Leftrightarrow 3x = -2$ ou $x^2 = -1 < 0$, impossible ou $x = 1$

  $\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$ ou $x = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ donc $x^2 + 1 \geq 1 > 0$
-

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{2}{3}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x+2$ | | $-$ | 0 | $+$ | \| | $+$ | |
| $x^2+1$ | | $+$ | \| | $+$ | \| | $+$ | |
| $1-x$ | | $+$ | \| | $+$ | 0 | $-$ | |
| $(3x+2)(x^2+1)(1-x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

**2)** $\frac{(-3x^2-x+2)(x-2)}{3x-9}$ est sous la forme d'un quotient avec un produit au numérateur, on peut donc établir son tableau de signes.

- $\frac{(-3x^2-x+2)(x-2)}{3x-9} = 0 \Leftrightarrow (-3x^2 - x + 2))(x-2) = 0$ et $3x - 9 \neq 0$

  $\Leftrightarrow -3x^2 - x + 2 = 0$ ou $x - 2 = 0$ et $3x \neq 9$

  $\Leftrightarrow -3x^2 - x + 2 = 0$ ou $x = 2$ et $x \neq 3$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\times(-3)\times 2 = 1 + 24 = 25 = 5^2 > 0$ donc $-3x^2 - x + 2 = 0$ admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-5}{-6} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+5}{-6} = -1$$

Ainsi, $\frac{(-3x^2-x+2)(x-2)}{3x-9} = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = \frac{2}{3}$ ou $x = 2$ et $x \neq 3$

➢

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{2}{3}$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-3x^2-x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| $x-2$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $3x-9$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\frac{(-3x^2-x+2)(x-2)}{3x-9}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | |

**3)** $\frac{5e^{3x+1} - 2xe^{3x+1}}{(x-1)^2}$ est sous la forme d'un quotient avec une somme au numérateur, il faut donc factoriser ce dernier afin de pouvoir établir le tableau de signes de cette expression algébrique.

➢ $\frac{5e^{3x+1}-2xe^{3x+1}}{(x-1)^2} = \frac{e^{3x+1}(5-2x)}{(x-1)^2}$

➢ $\frac{e^{3x+1}(5-2x)}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow e^{3x+1}(5-2x) = 0$ et $(x-1)^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow 5 - 2x = 0$ et $x - 1 \neq 0$ car $e^{3x+1} > 0$ sur $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$ et $x \neq 1$

➢

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $\frac{5}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e^{3x+1}$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $5-2x$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $(x-1)^2$ | | $+$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $\frac{e^{3x+1}(5-2x)}{(x-1)^2}$ | | $+$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

# Dérivation

**1)** $f(x) = \frac{x^2}{3}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3} \times x^2$

$f = k \times u$ où $k = \frac{1}{3}$ et $u(x) = x^2$

Or $f' = k \times u'$ où $u'(x) = 2x$

Donc, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{1}{3} \times 2x = \frac{2}{3}x}$

**2)** $f(x) = 2x^2 + \sqrt{x}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = 2x^2 + \sqrt{x}$

$f = u + v$ où $u(x) = 2x^2$ et $v(x) = \sqrt{x}$

$f' = u' + v'$ où $u'(x) = 4x$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\boxed{\text{Donc, pour tout } x \in \mathbb{R}^+,\ f'(x) = 4x + \frac{1}{2\sqrt{x}}}$

**3)** $f(t) = (2t - 1)(3t^2 + t + 1)$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = (2t - 1)(3t^2 + t + 1)$

$f = uv$ où $u(t) = 2t - 1$ et $v(t) = 3t^2 + t + 1$

$f' = u'v + uv'$ où $u'(t) = 2$ et $v'(t) = 6t + 1$

Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$f'(t) = 2(3t^2 + t + 1) + (6t + 1)(2t - 1)$

$= 6t^2 + 2t + 2 + 12t^2 - 6t + 2t - 1$

$\boxed{f'(t) = 18t^2 - 2t - 1}$

**4)** $f(x) = \frac{-3}{x-5}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{5\}$, $f(x) = \frac{-3}{x-5}$

$f = \frac{k}{v}$ où $k = -3$ et $v(x) = x - 5$

$f' = -\frac{kv'}{v^2}$ où $v'(x) = 1$

$\boxed{\text{Donc, pour tout } x \in \mathbb{R}\backslash\{5\},\ f'(x) = \frac{3}{(x-5)^2}}$.

**5)** $f(x) = 3x + 1 - \frac{5}{2x - 1}$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, $f(x) = 3x + 1 - \frac{5}{2x - 1}$

$f = u + v$ où $u(x) = 3x + 1$ et $v(x) = -\frac{5}{2x - 1}$

$f' = u' + v'$ où $u'(x) = 3$ et $v'(x) = \frac{10}{(2x - 1)^2}$

$\boxed{\text{Donc, pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\},\ f'(x) = 3 + \frac{10}{(2x - 1)^2}}$

**6)** $f(x) = \sqrt{2x + 3}$

$2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -3 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2}$ soit $x \in [-\frac{3}{2}; +\infty[$

Pour tout $x \in [-\frac{3}{2}; +\infty[$, $f(x) = \sqrt{2x + 3}$

$f = g(mx + p)$ où $g(X) = \sqrt{X}$

$f' = m \times g'(mx + p)$ où $g'(X) = \frac{1}{2\sqrt{X}}$

$\boxed{\text{Pour tout } x \in ]-\frac{3}{2}; +\infty[,\ f'(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x+3}} = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}}$

**7)** $f(x) = \cos(x)\sin(x)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)\sin(x)$

$f = uv$ où $u(x) = \cos(x)$ et $v(x) = \sin(x)$

$f' = u'v + v'u$ où $u'(x) = -\sin(x)$ et $v'(x) = \cos(x)$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$f'(x) = -\sin(x) \times \sin(x) + \cos(x) \times \cos(x)$

$\boxed{f'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)}$

**8)** $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 1}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 1}$

$f = \frac{u}{v}$ où $u(x) = x + 2$ et $v(x) = x^2 + 1$

$f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ où $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$f'(x) = \frac{1 \times (x^2 + 1) - 2x(x + 2)}{(x^2 + 1)^2}$

$= \frac{x^2 + 1 - 2x^2 - 4x}{(x^2+1)^2}$

$\boxed{f'(x) = \frac{-x^2 - 4x + 1}{(x^2 + 1)^2}}$

## Exercice 2

**a)** $B'(x) = -3x^2 + 20x + 3000$

$B'(x)$ est un polynôme du second degré avec $a = -3$, $b = 20$ et $c = 3000$, dont le discriminant est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 20^2 - 4 \times (-3) \times 3000 = 36400 = (20\sqrt{91})^2$$

$\Delta > 0$, $B'(x)$ admet donc 2 racines réelles distinctes :

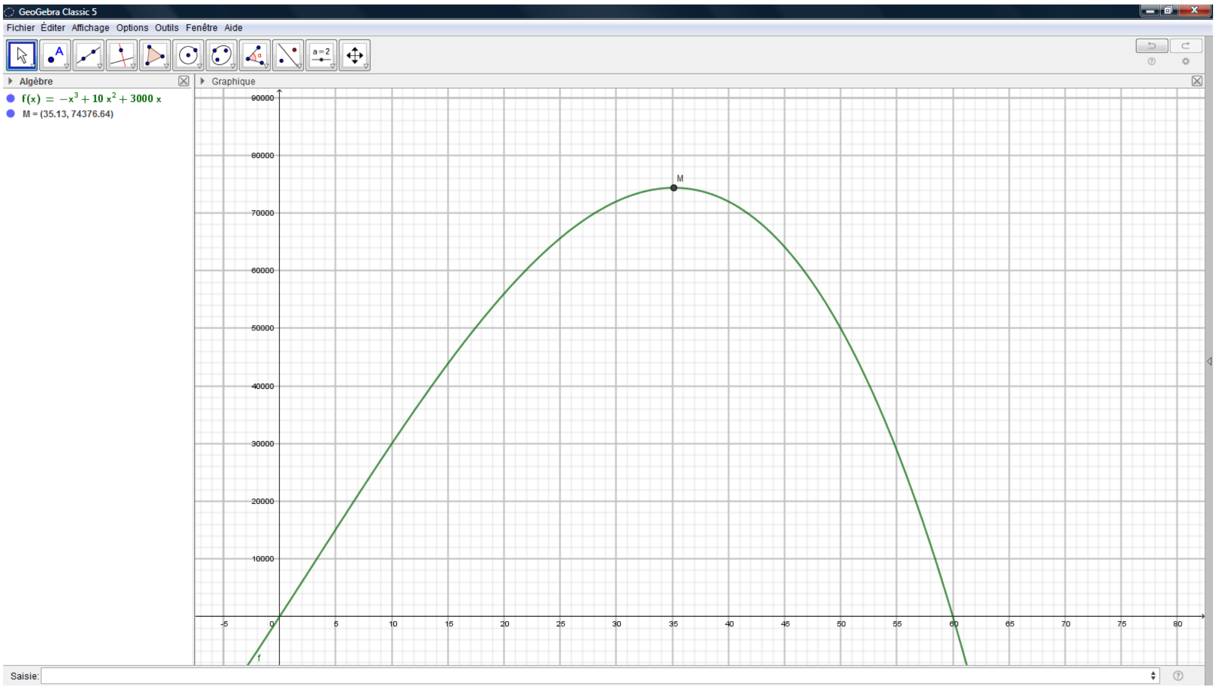
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-20 - 20\sqrt{91}}{-6} = \frac{10 + 10\sqrt{91}}{3} \approx 35{,}131 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 - 10\sqrt{91}}{3} \approx -28{,}465$$

**b)** Comme $B$ est définie sur [0 ; 50], on en déduit le tableau suivant :

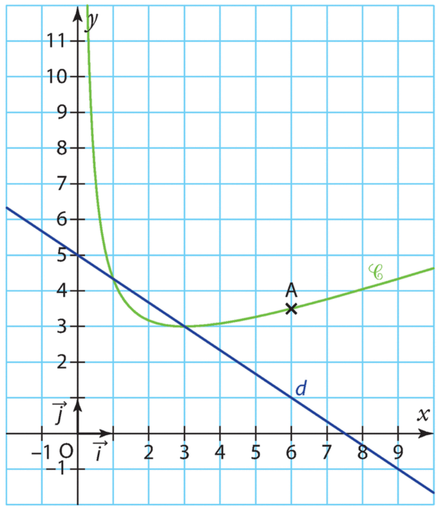
| $x$ | 0 | | $\frac{10 + 10\sqrt{91}}{3}$ | | 50 |
|---|---|---|---|---|---|
| Signes de $B'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| Variations de $B$ | 0 | $\nearrow$ | $B(x_1)$ | $\searrow$ | 50 000 |

**c)** $B\left(\frac{10 + 10\sqrt{91}}{3}\right) \approx 74\,377$

<u>L'entreprise doit vendre 35 131 kg de matière première pour réaliser un bénéfice maximum et son bénéfice est de 74 377 €</u>



## Exercice 3




La courbe $\mathcal{C}$ donnée ci-contre est la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + 3x + 9}{3x}$ définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = ]0\,;\,+\infty[$.

La droite $d$ a pour équation $y = -\frac{2}{3}x + 5$.

Le point A d'abscisse 6 est situé sur la courbe $\mathcal{C}$.

**1.** **a)** $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2 + 3x + 9$ et $v(x) = 3x$.

Les fonctions $u$ et $v$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ *(en tant que fonctions polynômes)*, donc dérivables sur I.

De plus, $v$ ne s'annule pas sur I.

$\boxed{\text{Donc } f \text{ est dérivable sur I}}$.

**b)** $f = \frac{u}{v}$ donc $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = 2x + 3$ et $v'(x) = 3$.

Ainsi pour tout réel $x$ de I, $f'(x) = \dfrac{(2x+3) \times 3x - \left(x^2 + 3x + 9\right) \times 3}{(3x)^2}$

$$= \frac{6x^2 + 9x - 3x^2 - 9x - 27}{9x^2}$$

$$= \frac{3x^2 - 27}{9x^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^2 - 9}{3x^2}}$$

**2.** $f$ est dérivable sur I donc $f$ est dérivable en 6.

Une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 6 est : $y = f'(6)(x - 6) + f(6)$.

Or $f'(6) = \dfrac{6^2 - 9}{3 \times 6^2} = \dfrac{1}{4}$ et $f(6) = \dfrac{6^2 + 3 \times 6 + 9}{3 \times 6} = \dfrac{7}{2}$

D'où $\mathcal{T} : y = \frac{1}{4}(x - 6) + \frac{7}{2}$

$\mathcal{T} : y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{2} + \frac{7}{2}$

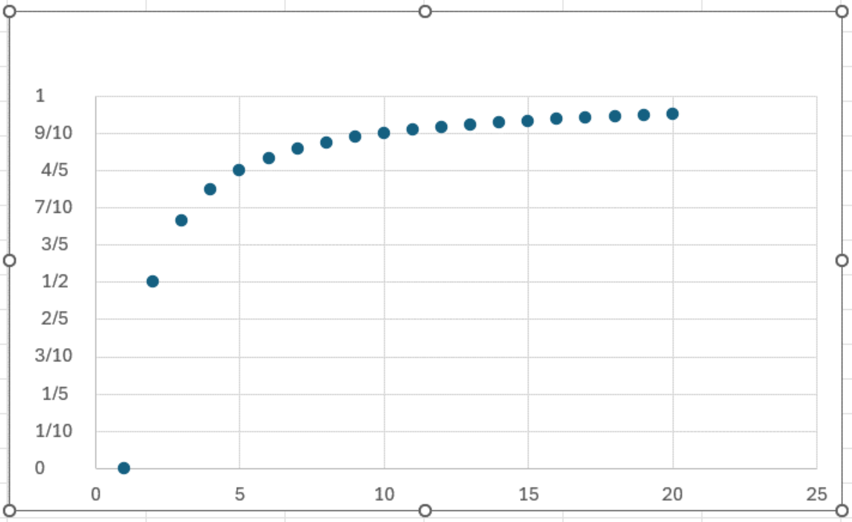
$\boxed{\mathcal{T} : y = \frac{1}{4}x + 2}$

# Suites numériques

## Exercice 1

**1.** **a) b)**

| A | B | C |
|---|---|---|
| n | $u_n$ | $v_n$ |
| 1 | 0 | -1 |
| 2 | 1/2 | -2 |
| 3 | 2/3 | -3 |
| 4 | 3/4 | -4 |
| 5 | 4/5 | -5 |
| 6 | 5/6 | -6 |
| 7 | 6/7 | -7 |
| 8 | 7/8 | -8 |
| 9 | 8/9 | -9 |
| 10 | 9/10 | -10 |
| 11 | 10/11 | -11 |
| 12 | 11/12 | -12 |
| 13 | 12/13 | -13 |
| 14 | 13/14 | -14 |
| 15 | 14/15 | -15 |
| 16 | 15/16 | -16 |
| 17 | 16/17 | -17 |
| 18 | 17/18 | -18 |
| 19 | 18/19 | -19 |
| 20 | 19/20 | -20 |




**c)** • $u_2 - u_1 = \frac{1}{2}$ ; $u_3 - u_2 = \frac{1}{6}$, on remarque que $u_2 - u_1 \neq u_3 - u_2$

Comme la différence entre 2 termes consécutifs n'est pas constante, alors $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est pas arithmétique}}$.

• $\frac{u_3}{u_2} = \frac{4}{3}$ ; $\frac{u_4}{u_3} = \frac{9}{8}$, on remarque que $\frac{u_3}{u_2} \neq \frac{u_4}{u_3}$

Comme le quotient de 2 termes consécutifs n'est pas constant, alors $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ n'est pas géométrique}}$.

**d)** $\boxed{u_n \text{ semble être égal à } \frac{n-1}{n}.}$

**On cherche une formule qui permette de calculer $u_n$ en fonction $n$.**

On considère la suite $(v_n)$ définie de la façon suivante : pour tout entier naturel $n$ différent de 0 , $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.

**2.** **a)** Tableau de valeurs complété à la question **1.a)**

**b)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{-1} - \frac{1}{u_n - 1} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2-u_n} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2-u_n} - \frac{2-u_n}{2-u_n}} - \frac{1}{u_n - 1} \\ &= \frac{1}{\frac{u_n - 1}{2-u_n}} - \frac{1}{u_n - 1} \\ &= \frac{2-u_n}{u_n - 1} - \frac{1}{u_n - 1} \\ &= \frac{1-u_n}{u_n - 1} \\ v_{n+1} - v_n &= -1 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Donc la suite } (v_n) \text{ est une suite arithmétique de raison } r = -1 \text{ et de premier terme } v_1 = -1}$.

**d)** On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ , $v_n = v_1 + (n-1)r$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = -1 + (-1) \times (n-1)$ ; $\boxed{v_n = -n}$.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$, alors $-n = \dfrac{1}{u_n - 1}$

D'où $u_n - 1 = \dfrac{1}{-n}$

Ainsi, $u_n = \dfrac{1}{-n} + 1 = \dfrac{1}{-n} + \dfrac{-n}{-n} = \dfrac{1-n}{-n} = \dfrac{n-1}{n}$

$\boxed{\text{Donc, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{n-1}{n}}$. *On a ainsi validé la conjecture émise à la question **1d)***

## Exercice 2

$u_0 = 1000$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1{,}2u_n - 100$.

**1.** **a)** Situation

$u_0 = 1000$ grammes, c'est l'apport initial de bactéries dans la cuve.

Chaque jour la masse des bactéries augmente de 20 % et 100 g de bactéries sont perdus lors du remplacement du milieu nutritif.

$\boxed{\text{D'où, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \left(1 + \frac{20}{100}\right)u_n - 100 = 1{,}2u_n - 100}$.

Et, $\boxed{u_n \text{ représente donc la masse des bactéries en grammes au bout de } n \text{ jours}}$.

**b)** $u_1 = 1{,}2u_0 - 100 = 1{,}2 \times 1000 - 100 = 1100$ et $u_2 = 1{,}2u_1 - 100 = 1{,}2 \times 1100 - 100 = 1220$.

• $u_1 - u_0 = 1100 - 1000 = 100$ et $u_2 - u_1 = 1220 - 1100 = 120$

Donc $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$. $\boxed{\text{Ainsi la suite } (u_n) \text{ n'est pas arithmétique}}$.

• $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{1100}{1000} = 1{,}1$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{1220}{1100} \approx 1{,}109$

Donc $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$. $\boxed{\text{Ainsi la suite } (u_n) \text{ n'est pas géométrique}}$.

**c)** On cherche le plus petit entier naturel $n$ tel que $u_n > 30\,000$.

À l'aide du tableau de valeurs de la calculatrice, on obtient $u_{22} \approx 28\,103$ et $u_{23} \approx 33\,624$.

$\boxed{\text{Ainsi au bout de 23 jours la masse de bactéries dépassera 30 kg}}$.

**d)**

```
n ← 0
u ← 1000
Tant que u ≤ 30 000
    u ← 1,20 u − 100
    n ← n+1
Fin tant que
```

**2.** Variation de la suite $(u_n)$ :

On admet que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1000$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 1{,}2u_n - 100 - u_n = 0{,}2u_n - 100$

Or, $u_n \geq 1000 \Leftrightarrow 0{,}2u_n \geq 0{,}2 \times 1000$ car $0{,}2 > 0$

$\Leftrightarrow 0{,}2u_n - 100 \geq 200 - 100$

$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \geq 100$

Ainsi, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$.

$\boxed{\text{On a démontré que la suite } (u_n) \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{N}}$.

**3.** $\forall\, n \in \mathbb{N},\, v_n = u_n - 500.$

**a)** $$\begin{aligned}\forall\, n \in \mathbb{N},\, v_{n+1} &= u_{n+1} - 500\\ &= 1{,}2u_n - 100 - 500\\ &= 1{,}2u_n - 600\\ &= 1{,}2\left(u_n - \frac{600}{1{,}2}\right)\\ &= 1{,}2(u_n - 500)\\ v_{n+1} &= 1{,}2v_n\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Ainsi la suite } (v_n) \text{ est géométrique de raison } q = 1{,}2 \text{ et de 1}^{\text{er}} \text{ terme } v_0 = u_0 - 500 = 1000 - 500 = 500}$.

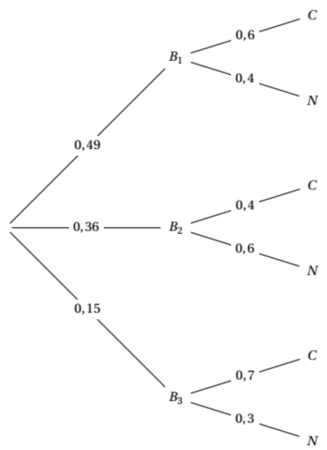
**b)** On en déduit alors que : $\underline{\forall\, n \in \mathbb{N}}$, $v_n = v_0 \times q^n$ soit $\boxed{v_n = 500 \times 1{,}2^n}$.
Et, $\forall\, n \in \mathbb{N},\, v_n = u_n - 500 \Leftrightarrow u_n = v_n + 500$.
Ainsi, $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_n = 500 \times 1{,}2^n + 500}$.

**c)** $\boxed{\text{Il semble que } \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$ c'est-à-dire que la suite $(u_n)$ diverge vers $+\infty$.

## Probabilités

**1.** 0,6 correspond à la probabilité que le cookie soit au chocolat sachant qu'il provient de la boulangerie 1.

**2.** <u>Arbre pondéré</u> :




**3.** $\boxed{B_1 \cap C \text{ est l'évènement « le cookie provient de la boulangerie 1 et est au chocolat »}}$.

$P(B_1 \cap C) = P(B_1) \times P_{B_1}(C)$ soit $P(B_1 \cap C) = 0{,}49 \times 0{,}6$ d'où $\boxed{P(B_1 \cap C) = 0{,}294}$.

**4.** Les évènements $B_1$ ; $B_2$ et $B_3$ forment une partition de l'univers.
D'après **la formule des probabilités totales**, on a :

$$\begin{aligned}P(C) &= P(B_1 \cap C) + P(B_2 \cap C) + P(B_3 \cap C)\\ &= 0{,}294 + 0{,}36 \times 0{,}4 + 0{,}15 \times 0{,}7\\ &= 0{,}294 + 0{,}144 + 0{,}105\end{aligned}$$

$\boxed{P(C) = 0{,}543}$

**5.** $P_{B_1}(C) = 0{,}6$ et $P(C) = 0{,}543$ donc $P_{B_1}(C) \neq P(C)$. $\boxed{\text{Ainsi les évènements } B_1 \text{ et } C \text{ ne sont pas indépendants}}$.

**6.** $P_C(B_2) = \dfrac{P(B_2 \cap C)}{P(C)}$ ; $P_C(B_2) = \dfrac{0{,}36 \times 0{,}4}{0{,}543}$ ; $P_C(B_2) \approx 0{,}265$

$\boxed{\text{Au millième près, 0,265 est la probabilité d'avoir un cookie provenant de la boulangerie 2 sachant qu'il est au chocolat.}}$

# Fonction exponentielle

## Partie A

1. $d(t) = \mathrm{e}^{3t} \times \mathrm{e}^{1-6t} \times \mathrm{e}^{6t+3} = \mathrm{e}^{3t+1-6t+6t+3} = \mathrm{e}^{3t+4}$
2. $e(t) = \mathrm{e}^{8t-3-(2t+5)} = \mathrm{e}^{6t-8}$
3. $f(t) = \mathrm{e}^{-2t+1+6t+5-(-4t-2)} = \mathrm{e}^{8t+8}$

## Partie B

On utilise la formule de dérivée d'un produit de fonctions : $(uv)' = u'v + uv'$.

1. $f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + (x+1)\mathrm{e}^x = (2+x)\mathrm{e}^x$
2. $f'(x) = -2 \times \mathrm{e}^x + (-2x+3)\mathrm{e}^x = (-2x+1)\mathrm{e}^x$
3. $f'(x) = 2x \times \mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = (2x+x^2)\mathrm{e}^x$
4. $f'(x) = (2x-3)\mathrm{e}^x + (x^2-3x+1)\mathrm{e}^x = (x^2-x-2)\mathrm{e}^x$

## Partie C

1. Pour tout réel $x$, on a $\mathrm{e}^x > 0$, et en particulier $\mathrm{e}^x \neq 0$. Le domaine de définition de $f$ est donc $\mathbb{R}$.

   Et pour tout réel $x$, $f'(x) = \dfrac{1 \times \mathrm{e}^x - x \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{(1-x)\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}} = \dfrac{1-x}{\mathrm{e}^x}$.

2. On a $\mathrm{e}^x - 1 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Le domaine de définition est donc $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   Et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x \times (\mathrm{e}^x - 1) - (\mathrm{e}^x + 1) \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} = \dfrac{-2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}$.

3. Le domaine de définition de la fonction est $\mathbb{R}$. Et pour tout $x$ réel, $f'(x) = \mathrm{e}^x$.

4. Le domaine de définition de la cette fonction est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

   Et pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f'(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t \times (t-1) - (\mathrm{e}^t + 1) \times 1}{(t-1)^2} = \dfrac{t\mathrm{e}^t - 2\mathrm{e}^t - 1}{(t-1)^2}$.

## Partie D

1. $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-2} \Leftrightarrow x = -2$. Donc l'ensemble des solutions de cette équation est $S = \{-2\}$.
2. $\mathrm{e}^x = \mathrm{e} \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^1 \Leftrightarrow x = 1$. Donc $S = \{1\}$.
3. $\mathrm{e}^{x+2} = \mathrm{e}^3 \Leftrightarrow x + 2 = 3 \Leftrightarrow x = 1$. Donc $S = \{1\}$.
4. $\mathrm{e}^{2x+1} = \mathrm{e} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x+1} = \mathrm{e}^1 \Leftrightarrow 2x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Donc $S = \{0\}$.
5. $\mathrm{e}^x = 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow x = 0$. Donc $S = \{0\}$.
6. $\mathrm{e}^x + 4 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = -4$ ce qui est impossible car la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. L'équation n'admet aucune solution : $S = \varnothing$.
7. $\mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$. Donc $S = \{-1; 1\}$.
8. $\mathrm{e}^{x^2+1} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x^2+1} = \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0$ ce qui est impossible, donc $S = \varnothing$.

## Partie E

1. $\mathrm{e}^{x+1} < 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x+1} < \mathrm{e}^0$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et donc $x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$. On a donc $S = ]-\infty; -1[$.
2. On a $-3\mathrm{e}^{x^2+4} > 4 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x^2+4} < -\dfrac{4}{3}$. Or, pour tout réel $x$, $\mathrm{e}^{x^2+4} > 0$. Cette inéquation n'admet donc aucune solution. On a $S = \varnothing$.
3. Pour tout réel $x$, $\mathrm{e}^{-2x+5} > 0$ car la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $S = \mathbb{R}$.

4. $\mathrm{e}^{x+4} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^{3x}} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x+4} \leqslant \mathrm{e}^{-3x} \Leftrightarrow x+4 \leqslant -3x$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a donc $x \leqslant -1$. Et donc $S = ]-\infty; -1]$.

## Partie F

1. Graphiquement, la solution de l'équation $f(x) = 6$ semble être $x = 12$.
2.
   a. f(0) = 7
   b. On a $f(0) = (a \times 0 + b)\mathrm{e}^{-0.2\times 0} = b$.
   c. On a d'un côté $f(0) = 7$ et de l'autre $f(0) = b$ donc $b = 7$.
3.
   a. Le coefficient directeur de la droite $(AB)$ est $\dfrac{14.2-7}{2-0} = 3.6$.
   b. Pour tout $x \in I$, $f'(x) = a \times \mathrm{e}^{-0.2x} - 0.2(ax+7)\mathrm{e}^{-0.2x} = (-0.2ax + a - 1.4)\mathrm{e}^{-0.2x}$.
   c. On sait que la droite $(AB)$ est la tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse $x = 0$, son coefficient directeur est donc égal à $f'(0)$. Ainsi, $f'(0) = a - 1.4 = 3.6$ d'où $a = 5$. On a donc $f(x) = (5x+7)\mathrm{e}^{-0.2x}$.
4.
   a. En utilisant l'expression de $f'$ trouvée en 3.b. on obtient, pour tout $x \in I$, $f'(x) = (-x+3.6)\mathrm{e}^{-0,2x}$.
   b. Pour tout $x \in I$, $\mathrm{e}^{-0,2x} > 0$. $f'(x)$ est donc du signe de $-x + 3.6$.

| $x$ | $0$ | | $3.6$ | | $25$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $7$ | $\nearrow$ | $25\mathrm{e}^{-0.72}$ | $\searrow$ | $132\mathrm{e}^{-5}$ |

   c. Le maximum de $f$ sur $I$ est donc $25\mathrm{e}^{-0.72}$.

*Les thèmes suivants ne concernent pas les élèves d'option Maths Complémentaires*

# Produit scalaire

## Exercice 1

**a.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC} = 2 \times 3 \times \cos\pi = -6$

**b.** 2 cas sont possibles :

• Si l'angle $\widehat{A}$ est aigu alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de même sens.

Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = AB \times AH = 4 \times 0{,}5 = 2$

• Si l'angle $\widehat{A}$ est obtus alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de sens contraire.

Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = -AB \times AH = -4 \times 0{,}5 = -2$

**c.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - CB^2) = 2{,}5$

**d.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = x_{\overrightarrow{AB}} \times x_{\overrightarrow{AC}} + y_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{AC}} = 1 \times 3 + (-1) \times 5 = -2$

Il s'agit de la réponse **b** si l'angle $\hat{A}$ est obtus ou de la réponse **d**.

## Exercice 2

**1.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = x_{\overrightarrow{AB}} \times x_{\overrightarrow{AC}} + y_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{AC}} = -2 \times 2 + (-1)\times(-5) = 1$. Ainsi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1$.

**2.** $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{{x_{\overrightarrow{AB}}}^2 + {y_{\overrightarrow{AB}}}^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\hat{A} = 1$$
$$\Leftrightarrow cos\widehat{A} = \frac{1}{\sqrt{5} \times \sqrt{29}}$$
$$\Leftrightarrow \widehat{A} = cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5} \times \sqrt{29}}\right)$$

À l'aide de la calculatrice, on trouve $\hat{A} = 85°$ (au degré près).

***Remarque*** *: Puisque $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} > 0$, il est cohérent d'obtenir une mesure de l'angle $\widehat{A}$ inférieure à $90°$.*

## Exercice 3

**Rappel :** 2 vecteurs sont orthogonaux si, et seulement si, leur produit scalaire est nul.

$$\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow 6\times(-3) + 2x = 0$$
$$\Leftrightarrow -18 + 2x = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 9$$

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\x\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ sont orthogonaux lorsque $x = 9$.

# Trigonométrie

**RAPPEL :** 180° correspond à $\pi$ rad

**1.** $\alpha = 12°$ donc $\boxed{\alpha = \frac{12\pi}{180} = \frac{\pi}{15} \text{ rad}}$ $\beta = 195°$ donc $\boxed{\beta = \frac{195\pi}{180} = \frac{13\pi}{12} \text{ rad}}$

**2.** $a = \frac{7\pi}{12}$ rad donc $\boxed{a = \frac{7 \times 180}{12} = 105°}$ $b = \frac{13\pi}{9}$ rad donc $\boxed{b = \frac{13 \times 180}{9} = 260°}$

**3.** On sait d'un réel $x$ que $x \in [0\,;\pi]$ et $\cos x = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

**3.1.** Pour tout réel $x$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

D'où $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = 1 - \frac{1+2\sqrt{5}+5}{16}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{16-(6+2\sqrt{5})}{16}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{10-2\sqrt{5}}{16} \quad \text{où} \quad \frac{10-2\sqrt{5}}{16} > 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = -\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}} \quad \text{ou} \quad \sin x = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}$$

Or $x \in [0\,;\pi]$ donc $\sin x \geq 0$.

$\boxed{\text{Ainsi la valeur exacte de } \sin x \text{ est : } \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}}$.

**3.2.** On sait que $x \in [0\,;\pi]$, $\cos x \geq 0$ et $\sin x \geq 0$. Donc le réel $x$ cherché appartient à l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

$\boxed{\text{Ainsi le réel cherché } x \text{ est égal à } \frac{\pi}{5}}$.

**4.** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2x) + \cos(x) \times \sin(x)$.

**RAPPEL :** Une fonction trigonométrique $f$ définie sur $\mathbb{R}$ est périodique de période **T** si et seulement si, pour tout réel $x$, $f(x + T) = f(x)$.

**4.1** $f$ est une fonction trigonométrique définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x+\pi) = \sin(2(x+\pi)) + \cos(x+\pi) \times \sin(x+\pi)$$
$$= \sin(2x+2\pi) + \cos(x+\pi) \times \sin(x+\pi)$$

Or la fonction sinus est $2\pi$-périodique donc $\sin(2x+2\pi) = \sin(2x)$.

De plus, $\cos(x+\pi) = -\cos x$ et $\sin(x+\pi) = -\sin x$.

Donc $f(x+\pi) = \sin(2x) + (-\cos x) \times (-\sin x)$

$$= \sin(2x) + \cos x \times \sin x$$

$$f(x+\pi) = f(x)$$

$\boxed{\text{Donc la fonction } f \text{ est périodique de période } \pi.}$

**4.2** • $\mathbb{R}$ est centré en 0 ;

• Pour tout réel $x$, $f(-x) = \sin(-2x) + \cos(-x) \times \sin(-x)$

$$= -\sin(2x) + \cos x \times (-\sin x)$$
$$= -\sin(2x) - \cos x \times \sin x$$
$$= -(\sin(2x) + \cos x \times \sin x)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

$\boxed{\text{Donc } f \text{ est une fonction impaire}}$.